Développement : Rang d'un élément dans un tableau

Pierron Théo – Lacoste Cyril

13 novembre 2013

Définition Soit T un tableau, T' le tableau T trié. L'élément de rang i de T est $T'[i]$.

Par la suite on considère un tableau T de taille n dont tous les éléments sont distincts. On considère l'algorithme diviser pour régner suivant :

Algorithme 1: Rang(T, i)

Entrées : Un tableau T et un entier i
Sorties : L'élément de rang i dans T

si $n = 1$ **alors**
  retourner $T[0]$
Choisir un pivot x pour T.
$T_1 :=$ tableau des $T[y]$ tel que $T[y] < x$
$T_2 :=$ tableau des $T[y]$ tel que $T[y] \geqslant x$
si $i = |T_1|$ **alors**
  retourner x
si $i < |T_1|$ **alors**
  retourner *Rang*(T_1, i)
si $i > |T_1|$ **alors**
  retourner *Rang*$(T_2, i - |T_1|)$

On donne un algorithme pour le choix de pivot pour que Rang ait une complexité en $O(n)$.

Algorithme 2: Pivot(T)

Entrées : Un tableau T
Sorties : Un élément pivot de T

Diviser T en $\lfloor \frac{n}{5} \rfloor$ blocs de 5 éléments, plus un bloc à $n \mod 5$ éléments.
Trouver le médian m_k de chaque bloc.
Choisir l'élément de rang $\lfloor \frac{n+5}{10} \rfloor$ dans le tableau $M = [m_k]$, ie Rang$(M, \lfloor \frac{n+5}{10} \rfloor)$.

Lemme
Avec un tel pivot P, il y a au moins $3\lfloor \frac{n-5}{10} \rfloor$ éléments de T strictement inférieurs à P.

Démonstration. Chaque m_k est supérieur à trois éléments dans son bloc. Le pivot P est strictement supérieur à $\lfloor \frac{n+5}{10} \rfloor - 1$ médians.

Ainsi, P est strictement supérieur à $3\lfloor \frac{n-5}{10} \rfloor$ éléments de T. ∎

Lemme
Avec un tel pivot P, il y a au moins $3\lfloor \frac{n-5}{10} \rfloor$ éléments de T supérieurs ou égaux à P.

Démonstration. Chaque m_k est inférieur à trois éléments dans son bloc. Le pivot P est inférieur à $\lfloor \frac{n}{5} \rfloor - \lfloor \frac{n+5}{10} \rfloor + 1$ médians.

Ainsi, P est inférieur à au moins $3\lfloor \frac{n}{5} \rfloor - 3\lfloor \frac{n+5}{10} \rfloor + 3$ éléments de T, ce qu'on peut minorer par $3\lfloor \frac{n-5}{10} \rfloor$ éléments de T. ■

Ces deux lemmes prouvent que $|T_1| \leqslant \frac{7n}{10}$ et $|T_2| \leqslant \frac{7n}{10}$ pour un tel choix de pivot. Écrivons maintenant une inégalité vérifiée par la complexité $T(n)$ (croissante en n) de $\text{Rang}(T, i)$ en fonction de n :

$$T(n) \leqslant \underbrace{n}_{\text{calcul des médians}} + \underbrace{T\left(\frac{n}{5}\right)}_{\text{sélection du pivot}} + \underbrace{T\left(\frac{7n}{10}\right)}_{\text{appel récursif}}$$

Soit $c = \frac{1}{5} + \frac{7}{10} = \frac{9}{10} < 1$.

Par récurrence, on prouve H_k : pour tout n tel que $c^k n < 1$, on a $T(n) \leqslant n\sum_{i=1}^{k} c^i$.

Si $n = 1$, $T(n) = 1$ donc H_1 est vraie.

Si H_k est vraie, soit n tel que $c^{k+1}n < 1$. Alors $\frac{7n}{10}c^k < c^{k+1}n < 1$ et $\frac{n}{5}c^k < c^{k+1}n < 1$ et on peut appliquer H_k :

$$T(n) \leqslant n + \frac{n}{5}\sum_{i=1}^{k} c^i + \frac{7n}{10}\sum_{i=1}^{k} c^i = n + n\sum_{i=2}^{k+1} c^i = n\sum_{i=1}^{k+1} c^i$$

ce qui prouve H_k.

Ainsi, pour tout $n > 0$, on peut majorer $T(n)$ par $n\sum_{i=1}^{\infty} c^i = \dfrac{cn}{1-c}$ car $c < 1$.

Finalement, $T(n) = O(n)$ et on obtient bien un algorithme linéaire pour le problème du rang.