

Géométrie différentielle

Pierron Théo

ENS Ker Lann

Table des matières

1	Théorie des courbes	1
1.1	Courbes de \mathbb{R}^n	1
1.1.1	Définition	1
1.1.2	Reparamétrisation	2
1.1.3	Longueur d'une courbe	3
1.1.4	Approximation par une ligne polygonale	3
1.2	Courbes planes	4
1.2.1	Courbure	4
1.2.2	Formules de Frenet	5
1.2.3	Nombre de rotation	5
1.2.4	Convexité et courbure	6
1.3	Courbes dans l'espace	7
1.3.1	Courbure et torsion	7
1.3.2	Formules de Frenet	8
1.3.3	Courbure totale	8
2	Théorie classique des surfaces	11
2.1	Surface régulière	11
2.1.1	Définition	11
2.1.2	Constructions implicites	11
2.2	Étude au premier ordre	13
2.3	Étude au second ordre	17
2.3.1	Orientabilité	17
2.3.2	Seconde forme fondamentale	18
2.3.3	Courbure normale	19
3	Géométrie intrinsèque des surfaces	25
3.1	Géométrie intrinsèque	25
3.2	Champ de vecteurs sur les surfaces	25
3.3	Calcul en coordonnées	27
3.4	Dérivées covariantes et courbure	29

4	Métriques riemanniennes	33
4.1	Géodésiques	33
4.2	Géométrie hyperbolique	36
5	Variétés abstraites	39
5.1	Définition	39
5.2	Les vecteurs tangents	40
5.3	Différentielle d'une application différentiable	41
5.4	Les sous-variétés	42
5.5	Inversion locale	42

Chapitre 1

Théorie des courbes

1.1 Courbes de \mathbb{R}^n

1.1.1 Définition

On munit \mathbb{R}^n de sa structure d'espace affine réel euclidien.

Définition 1.1 Une courbe paramétrée est une application $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ indéfiniment différentiable (à droite ou à gauche pour le bord) avec I un intervalle de \mathbb{R} (souvent ouvert).

On a donc :

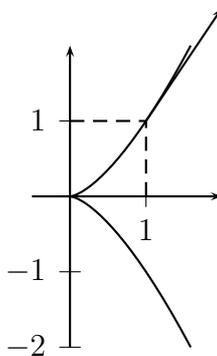
$$c : \begin{cases} I & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto & (x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{cases}$$

avec x_i des fonctions $I \rightarrow \mathbb{R} C^\infty$.

Exemple 1.1 Soit $h > 0$ et $c : t \mapsto (\cos t, \sin t, ht)$ (hélice).

Définition 1.2 Une courbe paramétrée est dite régulière ssi pour tout $t \in I$, $\dot{c}(t) = \frac{dc}{dt}(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t)) \neq 0$.

Exemple 1.2 $t \mapsto (t^2, t^3)$:



On a $\dot{c} = t \mapsto (2t, 3t^2)$. $\dot{c}(1) = (2, 3)$ et $\dot{c}(0) = (0, 0)$ donc la courbe n'est pas régulière.

1.1.2 Reparamétrisation

Exemple 1.3 Les courbes paramétrées :

$$\begin{cases} [0, 1] & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (t, 0) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} [0, \frac{1}{2}] & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (2t, 0) \end{cases}$$

ont même représentation (le segment $[0, 1]$).

Définition 1.3 Un difféomorphisme φ (sous-entendu C^∞) entre deux intervalles de \mathbb{R} est appelé changement de paramétrage.

Soit $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée et $\varphi : J \rightarrow I$ un changement de paramétrage. Alors la composée $c \circ \varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une courbe paramétrée appelée reparamétrisation de la courbe paramétrée c .

Exemple 1.4 Les deux paramétrages suivants donnent une courbe identique mais de sens de parcours contraires :

$$\begin{cases} [0, 1] & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (t, 0) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (1-t, 0) \end{cases}$$

On passe de l'un à l'autre par $\psi : t \mapsto 1-t$. On remarque que $\psi'(t) < 0$.

Remarque 1.1 Un changement de paramétrage $\varphi : J \rightarrow I$ a une réciproque dérivable donc pour tout $s \in J$, $\varphi'(s) \neq 0$. Par le TVI, soit $\varphi' > 0$, soit $\varphi' < 0$.

Définition 1.4 Une courbe de \mathbb{R}^n est une classe d'équivalence de courbes paramétrées pour la relation de reparamétrisation.

Une courbe orientée de \mathbb{R}^n est une classe d'équivalence de courbes paramétrées pour la relation de reparamétrisation par des φ qui conservent l'orientation ($\varphi' > 0$).

Définition 1.5 Une courbe paramétrée (à vitesse unitaire) par la longueur d'arc est une courbe paramétrée (régulière) $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $t \in I$, $\|\dot{c}(t)\| = 1$.

Proposition 1.1 Toute courbe régulière C admet un paramétrage par la longueur d'arc.

Démonstration. Soit $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée régulière qui représente C .

On cherche un paramétrage φ tel que, en notant $\tilde{c} = c \circ \varphi$, on ait $\|\dot{\tilde{c}}\| = 1$.

Soit $t_0 \in I$ on considère l'application

$$\psi : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \int_{t_0}^t \|\dot{c}(s)\| \, ds \end{cases}$$

C'est une primitive de la fonction (strictement positive) $\|\dot{c}\|$, donc ψ est continue strictement croissante, bijective et à réciproque dérivable. Soit $\varphi = \psi^{-1}$.

φ est un reparamétrage. Posons $\tilde{c} = c \circ \varphi$.

$$\|\dot{\tilde{c}}(s)\| = \|(c \circ \varphi)(s)\| = \|\dot{c}(\varphi(s))\| |\varphi'(s)| = \|\dot{c}(\varphi(s))\| \frac{1}{|\psi'(\varphi(s))|} = 1 \quad \blacksquare$$

Remarque 1.2 Deux paramétrages par la longueur d'arc différents diffèrent par un reparamétrage de la forme $s \mapsto s_0 \pm s$.

1.1.3 Longueur d'une courbe

Définition 1.6 La longueur d'une courbe paramétrée $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est

$$L[c] = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| \, dt$$

En particulier, si C est paramétrée par la longueur d'arc, $L[c]$ est la longueur de l'intervalle de départ de c .

Proposition 1.2 La longueur d'une courbe ne dépend pas du paramétrage choisi.

Démonstration. Soit C une courbe et $c_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $c_2 : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux paramétrages de C .

Il existe un reparamétrage $\varphi : J \rightarrow I$ tel que $c_2 = c_1 \circ \varphi$.

$$L[c_2] = \int_J \|\dot{c}_2(s)\| \, ds = \int_J \|\dot{c}_1(\varphi(s))\| \cdot |\varphi'(s)| \, ds = \int_I \|\dot{c}_1(t)\| \, dt = L[c_1] \quad \blacksquare$$

1.1.4 Approximation par une ligne polygonale

Définition 1.7 Une ligne polygonale P de \mathbb{R}^n est la donnée d'un $k+1$ -uplet (a_0, \dots, a_k) de points de \mathbb{R}^n .

Les a_i sont appelés sommets de P et supposés consécutivement disjoints ($a_i \neq a_{i+1}$ pour tout i). Les segments $[a_i, a_{i+1}]$ sont appelés les côtés.

La longueur de P est $L[P] = \sum_{i=0}^{k-1} \|a_i - a_{i+1}\|$.

Proposition 1.3 Soit c une courbe paramétrée ($c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$). Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute subdivision $s = (t_1, \dots, t_k)$ de $[a, b]$ de pas inférieur à δ , on ait, avec $P_s(c) = (c(t_0), \dots, c(t_k))$, $L[P_s(c)] \leq L[c] \leq L[P_s(c)] + \varepsilon$.

1.2 Courbes planes

On considère \mathbb{R}^2 muni de sa structure d'espace affine euclidien orienté.

Une courbe plane est une courbe dans \mathbb{R}^2 . Si $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une courbe plane paramétrée par la longueur d'arc, on définit le vecteur normal $n(t)$ à c au point $c(t) = (a(t), b(t))$ par $(-\dot{b}(t), \dot{a}(t))$. $(\dot{c}(t), n(t))$ est une base orthonormée directe.

1.2.1 Courbure

Définition 1.8 Si $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une courbe plane, alors on a $\|\dot{c}(t)\|^2 = 1$. En dérivant $\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle$, on obtient :

$$0 = 2\langle \dot{c}(t), \ddot{c}(t) \rangle$$

Donc $\ddot{c}(t)$ est orthogonal à \dot{c} donc s'écrit $\kappa(t)n(t)$. κ est appelée fonction courbure.

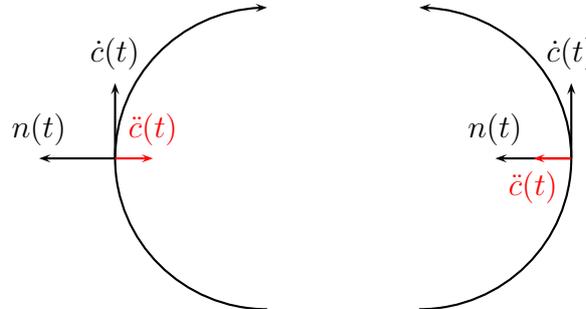


FIGURE 1.1 – Courbure

Remarque 1.3 Si la courbe n'est pas paramétrée par la longueur d'arc, on considère un changement de paramétrage $\varphi : J \rightarrow I$ tel que $\tilde{c} = c \circ \varphi$ soit paramétré par la longueur d'arc, avec la même orientation que c .

On a $\dot{\tilde{c}}(t) = \dot{c}(\varphi(t))\varphi'(t)$ et $\ddot{\tilde{c}}(s) = \ddot{c}(\varphi(s))\varphi'(s)^2 + \dot{c}(\varphi(s))\varphi''(s)$.

On a alors

$$\kappa(\varphi(s)) = \det(\dot{\tilde{c}}(s), \ddot{\tilde{c}}(s)) = \varphi'(s)^3 \det(\dot{c}(\varphi(s)), \ddot{c}(\varphi(s))) = \varphi'(s)^3 \kappa(\varphi(s))$$

Or $\|\tilde{c}(s)\| = 1 = \|\dot{c}(\varphi(s))\| \varphi'(s)$ donc pour une courbe régulière,

$$\kappa(t) = \frac{\det(\dot{c}(t), \ddot{c}(t))}{\|\dot{c}(t)\|^3}$$

1.2.2 Formules de Frenet

Pour une courbe $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ paramétrée par la longueur d'arc, le repère orthonormé direct $(\dot{c}(t), n(t))$ s'appelle repère de Frenet. Il varie suivant :

$$\begin{cases} \ddot{c}(t) &= \kappa(t)n(t) \\ \dot{n}(t) &= -\kappa(t)v(t) \end{cases}$$

Démonstration. La première équation a déjà été vue.

n est unitaire donc \dot{n} lui est orthogonal. Donc $\dot{n}(t) = \alpha(t)\dot{c}(t)$. En dérivant $\langle \dot{c}(t), n(t) \rangle = 0$, on trouve $\kappa(t) + \alpha(t) = 0$. D'où le résultat. ■

THÉORÈME 1.1 Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ . Alors il existe une courbe plane régulière orientée paramétrée par la longueur d'arc dont la fonction courbure est κ .

De plus cette courbe est unique à déplacement près dans \mathbb{R}^2 .

Exemple 1.5 Pour $\kappa = 0$, on obtient une droite.

Pour $\kappa = \text{Cste}$, on obtient un cercle de rayon $\frac{1}{\text{Cste}}$.

1.2.3 Nombre de rotation

Proposition 1.4 Soit $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc. Alors il existe une fonction $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que pour tout t , $\dot{c}(t) = (\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t)))$. Cette fonction est unique à translation de 2π près.

Démonstration. La difficulté réside dans le caractère C^∞ de θ .

On sépare la courbe en ouverts où \dot{x} ne s'annule pas, et ceux où \dot{y} ne s'annulent pas.

Ces ouverts pavent la courbe et deux ouverts consécutifs s'intersectent en ouverts non vides. Quand $\dot{y} \neq 0$ on peut prendre $\theta = \text{Arccotan}(\frac{\dot{x}}{\dot{y}})$ et quand $\dot{x} \neq 0$, on prend $\theta = \arctan(\frac{\dot{y}}{\dot{x}})$.

On peut bien recoller par le choix des ouverts, d'où le résultat. ■

Définition 1.9 Une courbe paramétrée $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite périodique de période L ssi pour tout x , $c(x+L) = c(x)$. L doit être la plus petite période.

Une courbe qui admet un paramétrage régulier périodique est dite fermée. Si de plus le paramétrage est injectif de $[0, L[\rightarrow \mathbb{R}$, cette courbe est dite fermée simple.

Exemple 1.6 Une ellipse est fermée simple. Un huit est fermé non simple.

Définition 1.10 Nombre de rotation Soit $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc et périodique de période L . Alors, avec la fonction θ précédente, le nombre de rotation de c est

$$n_c = \frac{\theta(L) - \theta(0)}{2\pi}$$

THÉORÈME 1.2 HOPF Une courbe fermée simple plane a un nombre de rotation égal à ± 1 .

1.2.4 Convexité et courbure

Définition 1.11 Une courbe régulière plane est dite convexe si en chaque point, elle est contenue dans un des demi-plans délimités par sa tangente.

Remarque 1.4 Une reformulation est : c est convexe ssi pour tout $t_0 \in I$, $t \mapsto \langle n(t_0), c(t) - c(t_0) \rangle$ est de signe constant.

THÉORÈME 1.3 Soit $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe régulière fermée simple. c est convexe ssi κ est de signe constant.

Démonstration.

\Rightarrow Si c est convexe, pour tout $t_0, t \in I$, $\langle n(t_0), c(t) - c(t_0) \rangle \geq 0$ (ou toujours ≤ 0).

On écrit le DL de $c(t)$:

$$c(t) - c(t_0) = \dot{c}(t_0)(t - t_0) + \frac{\ddot{c}(t_0)}{2}(t - t_0)^2 + O((t - t_0)^2)$$

Comme $n(t_0) \perp \dot{c}(t_0)$ et $\ddot{c}(t_0) = \kappa(t_0)n(t_0)$.

Ainsi pour tout t_0 , $\kappa(t_0) \geq 0$.

\Leftarrow Si $\kappa \geq 0$ (par symétrie), on raisonne par l'absurde en posant :

$$\varphi_{t_0} : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \langle n(t_0), c(t) - c(t_0) \rangle \end{cases}$$

On suppose qu'il existe t_0, t_1, t_2 tel que $\varphi_{t_0}(t_1) = \min \varphi_{t_0} < 0$ et $\varphi_{t_0}(t_2) = \max \varphi_{t_0} > 0$ (atteint car continue sur un compact).

$\dot{\varphi}_{t_0}(t_1) = 0 = \langle n(t_0), \dot{c}(t_1) \rangle$ et $\dot{\varphi}_{t_0}(t_2) = 0 = \langle n(t_0), \dot{c}(t_2) \rangle$.

1.3. COURBES DANS L'ESPACE

Parmi les vecteurs $\dot{c}(t_0)$, $\dot{c}(t_1)$ et $\dot{c}(t_2)$, deux sont égaux (ils sont tous les trois égaux ou opposés). On note $\dot{c}(s_0) = \dot{c}(s_1)$ avec $s_0 < s_1$.

On a donc $\theta(s_0) = \theta(s_1) + 2k\pi$ et $\dot{c}(s_1) = \dot{c}(s_0 + L)$ donc $\theta(s_0 + L) = \theta(s_1) + 2l\pi$.

Comme $\kappa(t) \geq 0$, on a $\dot{\theta}(t) \geq 0$. Donc $k \geq 0$ et $l \geq 0$. Or $n_c = k + l = \pm 1$ par Hopf. Donc $k = 0$ ou $l = 0$. Si $k = 0$, $\kappa(t) = 0$ sur $[s_1, s_2]$, donc c est un segment de droite, ce qui contredit $\varphi_{t_0}(s_1) < \varphi_{t_0}(s_2)$.

On a donc c convexe. ■

THÉORÈME 1.4 Soit $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe fermée plane de période L , paramétrée par la longueur d'arc. Alors le nombre de rotation n_c de c vaut

$$n_c = \frac{1}{2\pi} \int_0^L K(t) dt$$

Démonstration. Par définition, $n_c = \frac{\theta(L) - \theta(0)}{2\pi}$ où θ est C^∞ telle que $\dot{c} = (\cos \circ \theta, \sin \circ \theta)$.

On exprime l'accélération

$$\ddot{c}(t) = \frac{\partial \dot{c}}{\partial t} = \dot{\theta}(t)(-\sin(\theta(t)), \cos(\theta(t))) = \kappa(t)n(t)$$

Donc $\dot{\theta} = \kappa$.

$$D'où n_c = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \dot{\theta}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \kappa(t) dt. \quad \blacksquare$$

1.3 Courbes dans l'espace

On se place dans \mathbb{R}^3 affine euclidien orienté.

1.3.1 Courbure et torsion

Soit $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc. On pose $v(t) = \dot{c}(t)$ le vecteur vitesse et $\kappa(t) := \|\ddot{c}(t)\|$ la courbure. Si $\ddot{c}(t) \neq 0$, on pose $n(t) = \frac{\ddot{c}(t)}{\|\ddot{c}(t)\|}$ le vecteur normal.

On pose $b(t) = v(t) \wedge n(t)$ le vecteur binormal. Il est tel que $(v(t), n(t), b(t))$ est un repère orthonormé direct appelé repère de Frenet.

On a $\dot{v} = \dot{c} = \kappa n$. De plus, $\|n(t)\| = 1$ donc $\dot{n} \perp n$. Ainsi, $\dot{n} = av + \tau b$.

Or $a = \langle \dot{n}, v \rangle = -\langle n, \dot{v} \rangle = -\langle n, \kappa n \rangle = -\kappa$. D'où $\dot{n} = -\kappa v + \tau b$.

τ est appelé torsion de la courbe.

Exemple 1.7 Une courbe de \mathbb{R}^3 qui reste plane a une torsion nulle.

1.3.2 Formules de Frenet

Soit c une courbe de \mathbb{R}^3 paramétrée par la longueur d'arc et F son repère de Frenet.

Alors

$$F'(t) = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(t) & 0 \\ -\kappa(t) & 0 & \tau(t) \\ 0 & -\tau(t) & 0 \end{pmatrix} F(t)$$

THÉORÈME 1.5 Soit I un intervalle de \mathbb{R} , $K : I \rightarrow]0, +\infty[$ et $T : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions C^∞ .

Alors il existe une courbe de l'espace $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, paramétrée par la longueur d'arc et telle qu'en tout point de I , $\kappa = K$ et $\tau = T$.

De plus, la courbe est unique à déplacement près.

1.3.3 Courbure totale

Définition 1.12 La courbure totale d'une courbe de \mathbb{R}^3 fermée de période L est

$$\kappa(c) = \int_0^L \kappa(t) dt = \int_0^L \|\ddot{c}(t)\| dt$$

Définition 1.13 La mesure de l'angle extérieur à un polygone (a_1, \dots, a_n) en un sommet a_i est le nombre $\alpha \in [0, \pi]$ tel que

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \overrightarrow{a_{i-1}a_i}, \overrightarrow{a_i a_{i+1}} \rangle}{\|\overrightarrow{a_{i-1}a_i}\| \|\overrightarrow{a_i a_{i+1}}\|}$$

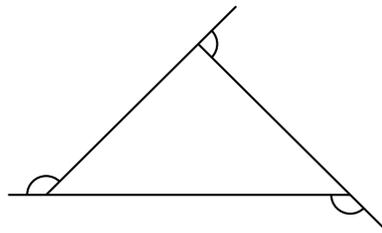


FIGURE 1.2 – Angles extérieurs à un triangle

THÉORÈME 1.6 Soit c une courbe fermée régulière de \mathbb{R}^3 . Alors $\kappa(c) = \sup \kappa(P)$ où le sup porte sur les polygones simplement inscrits dans c .

On rappelle que $\kappa(P)$ est la somme des angles extérieurs de P .

1.3. COURBES DANS L'ESPACE

Définition 1.14 Soit $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée régulière de \mathbb{R}^3 fermée de période L . Soit $e \in \mathbb{R}^3$ un vecteur unitaire. On considère la fonction

$$\varphi_e : \begin{cases} [0, L[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \langle e, \overrightarrow{oc(t)} \rangle \end{cases}$$

On note $\mu(c, e)$ le nombre de maxima locaux de φ_e .

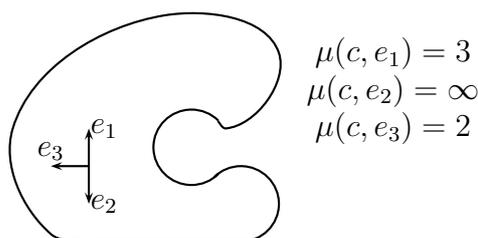


FIGURE 1.3 – Calcul de μ

THÉORÈME 1.7 Soit c une courbe régulière de \mathbb{R}^3 . Alors

$$\frac{K(c)}{2\pi} = \frac{1}{\text{Aire}(\mathbb{S}^2)} \int_{e \in \mathbb{S}^2} \mu(c, e) d\sigma(e).$$

Démonstration. Ici, \mathbb{S}^2 est la sphère unitaire de \mathbb{R}^3 qui paramètre les vecteurs e de \mathbb{R}_{ev}^3 , où $d\sigma$ est la mesure d'aire sur cette sphère ($\text{Aire}(\mathbb{S}^2) = \int_{\mathbb{S}^2} d\sigma = 4\pi$).

On démontre le théorème sur les polygones :

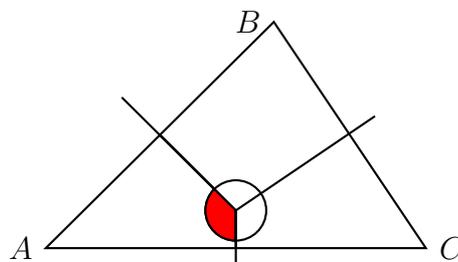


FIGURE 1.4 – Zone d'atteinte des maxima

Sauf pour trois directions, les maxima locaux de φ_e sont atteints aux sommets A , B et C . Pour quels vecteurs e , le sommet A est-il un maximum local de φ_e ? Ce sont les vecteurs e de la partie rouge.

Soit $P = (a_1, \dots, a_n)$ un polygone de \mathbb{R}^3 .

$$\begin{aligned} & \{e \in \mathbb{S}^2, \varphi_e \text{ atteint un max ou un min local en } a_j\} \\ &= \{e, \langle e, \overrightarrow{a_{j-1}a_j} \rangle \text{ et } \langle e, \overrightarrow{a_j a_{j+1}} \rangle \text{ sont de signe différents}\} \\ &= \left\{ e \in \mathbb{S}^2 \text{ orthogonaux à la géodésique reliant } \frac{\overrightarrow{a_{i-1}a_i}}{\|a_{i-1}a_i\|} \text{ à } \frac{\overrightarrow{a_i a_{i+1}}}{\|a_i a_{i+1}\|} \right\} \end{aligned}$$

qui est de mesure $\frac{\alpha_i}{\pi} \text{Aire}(\mathbb{S}^2)$. On obtient alors :

$$\int_{\mathbb{S}^2} \mu(c, e) + \mu(c, -e) \, d\sigma(e) = \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i}{\pi} \text{Aire}(\mathbb{S}^2)$$

donc

$$2 \int_{\mathbb{S}^2} \mu(c, e) \, d\sigma(e) = \frac{\kappa(P)}{\pi} \text{Aire}(\mathbb{S}^2) \quad \blacksquare$$

COROLLAIRE 1.1 DE FENCHEL *Pour une courbe régulière fermée c de \mathbb{R}^3 , $\kappa(c) \geq 2\pi$.*

Démonstration. Comme c est une courbe compacte, pour tout e unitaire, φ_e admet au moins un maximum local donc pour tout $e \in \mathbb{S}^2$, $\mu(c, e) \geq 1$.

Par le théorème précédent,

$$\kappa(c) = \frac{2\pi}{\text{Aire}(\mathbb{S}^2)} \int_{\mathbb{S}^2} \mu(c, e) \, d\sigma(e) \geq 2\pi \quad \blacksquare$$

Chapitre 2

Théorie classique des surfaces

On munit \mathbb{R}^3 de sa structure d'ev euclidien affine orienté canonique.

2.1 Surface régulière

2.1.1 Définition

Définition 2.1 Un sous-ensemble S de \mathbb{R}^3 est appelé surface régulière ssi pour tout $p \in S$, il existe un voisinage ouvert V de p dans \mathbb{R}^3 , un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ et une application $F \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ tel que $S \cap V = F(U)$, F réalise un homéomorphisme de U dans $S \cap V$ et $dF_{F^{-1}(p)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est de rang 2.

On dit alors que $F : U \rightarrow V$ est un paramétrage local de S au voisinage de p .

Exemple 2.1 Un plan affine est une surface régulière. La réunion de deux plans l'est ssi les plans sont parallèles.

Le graphe d'une fonction $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ est une surface régulière puisque $(x, y) \mapsto (x, y, f(x, y))$ a pour image le graphe de f et a une réciproque

$(x, y, z) \mapsto (x, y)$ continue, d'où un homéomorphisme. On a $dF_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$

qui est de rang 2.

2.1.2 Constructions implicites

Proposition 2.1 Soit V un ouvert de \mathbb{R}^3 et φ une fonction C^∞ . Soit $S = \{(x, y, z), \varphi(x, y, z) = 0\}$.

Si pour tout $p \in S$, $d\varphi_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est surjective alors S est régulière.

Démonstration. Soit $p \in S$. On sait par hypothèse que $d\varphi_p \neq 0$ et on cherche à écrire localement S au voisinage de p comme le graphe d'une fonction f .

On a soit $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(p) \neq 0$, soit $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(p) \neq 0$ soit $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(p) \neq 0$. On supposera être dans ce dernier cas. Par le TFI, f est bien un graphe donc S est régulière au voisinage de p . ■

Exemple 2.2 $\varphi : (x, y, z) \mapsto x^6 + y^6 + z^6 - 1$ définit une surface régulière par $\varphi = 0$. Mais $\varphi = -1$ ne définit pas une surface régulière.

Proposition 2.2 Soit S une surface régulière de \mathbb{R}^3 , W un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ d'image incluse dans S .

Alors f est C^∞ au voisinage de $w \in W$ ssi pour une paramétrisation locale $F : U \rightarrow V$ de S au voisinage de $f(w)$, $F^{-1} \circ f : f^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^∞ sur un voisinage de w .

Démonstration. Si $F^{-1} \circ f$ est C^∞ alors $F \circ F^{-1} \circ f = f$ est C^∞ . Réciproquement si f est C^∞ , on prend $\omega_0 \in W$ tel que $s_0 = f(\omega_0) \in F(U)$ ($u_0 = F^{-1}(s_0)$).

On écrit $F(x, y) = (X(x, y), Y(x, y), Z(x, y))$. Quitte à changer l'ordre des variables, on peut supposer que

$$\text{rg} \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{pmatrix} = 2$$

On cherche à prolonger F en un difféomorphisme local $U \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ avec I un intervalle de \mathbb{R} .

On considère l'application

$$G : \begin{cases} U \times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, t) & \mapsto & (X(x, y), Y(x, y), Z(x, y) + t) \end{cases}$$

qui est C^∞ . Sa différentielle en $(x_0, y_0, 0)$ a pour matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial X}{\partial y}(x_0, y_0) & 0 \\ \frac{\partial Y}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial Y}{\partial y}(x_0, y_0) & 0 \\ * & * & 1 \end{pmatrix}$$

de rang 3. Par le TIL, G est un difféomorphisme local. En particulier, G^{-1} est C^∞ au voisinage de s_0 .

On a $F^{-1} \circ f = G^{-1} \circ f$ car $F = G$ sur $t = 0$. D'où le résultat. ■

COROLLAIRE 2.1 CHANGEMENT DE CARTES *Les changements de paramétrage $F_2^{-1} \circ F_1$ sont de classe C^∞ et sont donc des difféomorphismes.*

Démonstration. $F_2 : F_2^{-1}(V_1 \cap V_2 \cap S) \rightarrow \mathbb{R}^3$ est C^∞ donc $F_1^{-1} \circ F_2$ est C^∞ par la proposition précédente. Ce sont de plus des homéomorphismes. ■

Proposition 2.3 Différentiabilité Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière, $p \in S$, $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue. Il y a équivalence entre :

- Il existe un voisinage V de p dans \mathbb{R}^3 sur lequel f s'étend en une application $C^\infty \tilde{f}$.
- Il existe une paramétrisation $F : U \rightarrow V$ de S au voisinage de p telle que $f \circ F$ soit C^∞
- Pour toute paramétrisation $F : U \rightarrow V$ de S au voisinage de p , $f \circ F$ est C^∞

Démonstration.

3 \Rightarrow 2 OK

2 \Rightarrow 3 Dans la démonstration précédente en utilisant $\text{rg } dF = 2$ et le théorème d'inversion locale on a montré l'existence de G . On pose alors

$$\tilde{f}(v) = f \circ F \circ p_U \circ G^{-1}.$$

La fonction \tilde{f} prolonge f de $S \cap V$ à V tout entier, \tilde{f} étant de classe C^∞ par composition de fonctions C^∞ .

1 \Rightarrow 3 On suppose l'existence d'un prolongement \tilde{f} de f à V . On prend une paramétrisation locale $F : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^3$ de S au voisinage de p et

$$f \circ F = \tilde{f} \circ F$$

est C^∞ par composition. ■

Définition 2.2 Une application continue $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ sur une surface régulière S est dite C^∞ (ou bien régulière) sur S si elle vérifie en tout point p l'une des conditions précédentes.

Remarque 2.1 En pratique on vérifiera plutôt 2).

Définition 2.3 Soit S et S' deux surfaces régulières de \mathbb{R}^3 et $f : S \rightarrow S'$. On dira que f est régulière (ou de classe C^∞) si en tout point p de S , il existe une paramétrisation $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de S au voisinage de p et une paramétrisation $F' : U' \rightarrow \mathbb{R}^3$ de S' au voisinage de $f(p)$ tel que $(F')^{-1} \circ f \circ F$ sont de classe C^∞ sur U .

2.2 Etude au premier ordre

Définition 2.4 Plan tangent à une surface régulière en un point Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière et $p \in S$. Le plan tangent à S en p est par définition

$$T_p S = \{X \in \mathbb{R}^3, \exists \varepsilon > 0, \exists c > 0,] - \varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S \subset \mathbb{R}^3 \text{ courbe tq } \dot{c}(0) = X\}.$$

Proposition 2.4 Si $F : U \rightarrow V$ est une paramétrisation de S au voisinage de p alors $T_p S = \text{Im } d_{u_0} F$ où $F(u_0) = p$ (C'est en particulier un sev de \mathbb{R}^3 et il est de dimension 2).

Démonstration. Soit $X \in \text{Im } d_{u_0} F$. Soit $Y \in \mathbb{R}^2$ tel que $X = (d_{u_0} F)(Y)$. Soit $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $c(t) := F(u_0 + tY)$. On obtient alors

$$\dot{c}(0) = \left. \frac{\partial F(u_0 + tY)}{\partial t} \right|_{t=0} = (d_{u_0} F)(Y) = X$$

donc $X \in T_p S$.

Réciproquement, si $X = \dot{c}(0) \in T_p S$, montrons que $X \in d_{u_0} F$. On considère $c' = F^{-1} \circ c :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$ qui est une courbe C^∞ .

Soit $Y = \dot{c}'(0) \in \mathbb{R}^2$.

$$(d_{u_0} F)(Y) = (d_{u_0})(\dot{c}'(0)) = d_0(F \circ c') = d_0 c = \dot{c}(0) = X \quad \blacksquare$$

Proposition 2.5 Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface donnée localement au voisinage de $p \in S$ par une équation $\varphi(x, y, z) = 0$ où $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ est une application C^∞ avec $d_p \varphi \neq 0$.

Alors $T_p S = \text{Ker}(d_p \varphi) = (\overrightarrow{\text{grad}}_p \varphi)^\perp$.

Démonstration. Soit $X \in T_p S$. Il existe $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S$ courbe paramétrisée avec $\dot{c}(0) = X$ et $c(0) = p$. Alors $\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $(\varphi \circ c)(t) = 0$. Donc

$$\left. \frac{\partial \varphi \circ c}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 = (d\varphi)|_{c(0)} \dot{c}(0) = (d_p \varphi)(X).$$

Donc $X \in \text{Ker } d_p \varphi$. Or $\dim T_p S = 2$ et $\dim \text{Ker } d_p \varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Donc $T_p S = \text{Ker } d_p \varphi$. Par définition, $\overrightarrow{\text{grad}}_p \varphi$ est l'unique vecteur de \mathbb{R}^3 tel que $\forall X \in \mathbb{R}^3$, $(d_p \varphi)(X) = \langle \overrightarrow{\text{grad}}_p \varphi, X \rangle$ donc $\text{Ker}(d_p \varphi) = (\overrightarrow{\text{grad}}_p \varphi)^\perp$. \blacksquare

Définition 2.5 Différentielle d'une application entre deux surfaces régulières de \mathbb{R}^3 Soit $f : S \rightarrow S'$ une application régulière entre deux surfaces régulières de \mathbb{R}^3 . Soit $p \in S$.

La différentielle $d_p f$ est définie sur $T_p S$ à valeurs dans $T_{f(p)} S'$ par le procédé suivant : soit $X \in T_p S$, il existe $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S$ tel que $c(0) = p$ et $\dot{c}(0) = X$. Alors

$$(d_p f)(X) := f \dot{\circ} c(0) \in T_{f(p)} S'$$

car $(f \circ c)(0) = f(p)$.

Remarque 2.2 Montrons que dans le procédé, le résultat ne dépend que du vecteur tangent X et pas de la courbe c choisie pour réaliser ce vecteur tangent. Montrons aussi que $d_p f : T_p S \rightarrow T_{f(p)} S'$ est linéaire.

Démonstration. On considère $\tilde{f} = (F')^{-1} \circ f \circ F$ arrive dans U' quitte à restreindre U . On considère $\tilde{c} = F^{-1} \circ c$. On a déjà vu que $(d_{u_0} F)(\tilde{c}(0)) = X$.

$$\begin{aligned} (d_p f)(X) &= \left. \frac{\partial f \circ c}{\partial t} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial f \circ F \circ \tilde{c}}{\partial t} \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{\partial F' \circ \tilde{f} \circ \tilde{c}}{\partial t} \right|_{t=0} = d(F' \circ \tilde{f})_{\tilde{c}(0)} \tilde{c}'(0) \\ &= d(F' \circ \tilde{f})_{u_0} (d_{u_0} F)^{-1}(X) \end{aligned}$$

c n'apparaît plus, $d_p f$ est linéaire comme composée. On a $d_{u'_0} F' \circ d_{u_0} \tilde{f} \circ d_{u_0} F = d_p f$. ■

Remarque 2.3 De la même façon, on peut contruire la différentielle $d_p f$ d'une fonction $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur une surface régulière S $d_p f : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ ou encore la différentielle $d_p G$ d'une application C^∞ $G : \mathbb{R}^n \rightarrow S$ et $d_x G : \mathbb{R}^n \rightarrow T_{G(x)} S$.

Définition 2.6 Première forme fondamentale Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière et $p \in S$. La première forme fondamentale de S en p est la restriction à $T_p S$ du produit scalaire de \mathbb{R}^3

Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière, $p \in S$, $F : U \rightarrow V$ un paramétrage local de S au voisinage de p .

$T_p S = \text{Im } d_p F = \text{Vect} \{ (d_p F)(\vec{e}_1), (d_p F)(\vec{e}_2) \}$ avec (\vec{e}_1, \vec{e}_2) la base canonique de \mathbb{R}^2 .

La première forme fondamentale I_S est décrite par la matrice

$$g_{i,j} = I_S((d_p F)(\vec{e}_1), (d_p F)(\vec{e}_2))$$

Exemple 2.3 $F(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ donc

$$T_{F(r,\theta)} = \text{Vect} \{ (\cos \theta, \sin \theta, 0), (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0) \}$$

et la première forme fondamentale I_S est décrite dans la paramétrisation F par la matrice

$$I_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

Définition 2.7 Une isométrie f entre deux surfaces S et S' régulières de \mathbb{R}^3 est un difféomorphisme de S sur S' qui conserve les formes fondamentales :

$$\forall p \in S, \forall v, w \in T_p S, I_p^s(v, w) = I_{f(p)}^{S'}(D_p f(v), D_p f(w))$$

Exemple 2.4

- Une isométrie conserve les longueurs des vecteurs tangents donc des courbes. En effet, soit S une surface régulière, $c : [a, b] \rightarrow S$ une courbe de S . Sa longueur est

$$L[c] = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{I_{c(t)}^S(\dot{c}(t), \dot{c}(t))} dt$$

- Une isométrie conserve les mesures d'angles. En effet, soit S une surface régulière, $p \in S$, $v, w \in T_p S$. Une mesure α de l'angle non orienté $(\widehat{v, w})$ vérifie

$$\cos \alpha = \frac{I_p(v, w)}{\sqrt{I_p(v, v)I_p(w, w)}}$$

On montrera qu'un difféomorphisme local f entre deux surfaces S et S' conserve les mesures d'angle (ie f est conforme) ssi

$$\forall p \in S, \exists c(p) > 0, \forall v, w \in T_p S, I_{f(p)} S'(D_p f(v), D_p f(w)) = c(p) I_p^S(v, w)$$

Calcul d'aires

Définition 2.8 Soit S une surface régulière de \mathbb{R}^3 , $p \in S$. Soit $F : U \rightarrow V$ un paramétrage local de S au voisinage de p . On note (e_1, e_2) la base canonique de \mathbb{R}^2 et (u_1, u_2) les coordonnées cartésiennes centrées en $\Omega \in \mathbb{R}^2$. On note $X_1(F(u)) = D_u F(e_1) = \frac{\partial F}{\partial u_1}(u)$ et $X_2(F(u)) = \frac{\partial F}{\partial u_2}(u)$ qui est une base de $T_{F(u)} S$. Pour $1 \leq i, j \leq 2$, $g_{i,j}(F(u)) = I_{F(u)}(X_i(F(u)), X_j(F(u)))$ sont les coefficients de la matrice de I_p dans (X_1, X_2) .

L'élément d'aire sur (S, I_p) dans le paramétrage F est par définition $\sqrt{\det g_{i,j}(F(u))} du_1 du_2$.

Lemme 2.0.1

Soit S une surface régulière de \mathbb{R}^3 , $F : U \rightarrow V$ et $F' : U' \rightarrow V'$ deux paramétrages de S au voisinage d'un point p . Soit $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^∞ à support compact dans $S \cap V \cap V'$. Alors

$$\begin{aligned} \iint_U f \circ F(u_1, u_2) \sqrt{\det(g_{i,j}(F(u)))}_{i,j} du_1 du_2 \\ = \iint_{U'} f \circ F'(u'_1, u'_2) \sqrt{\det(g'_{i,j}(F'(u')))}_{i,j} du'_1 du'_2 \end{aligned}$$

Démonstration. On note $\varphi = (F')^{-1} \circ F$. On a

$$\begin{aligned} g_{i,j}(F(u)) &= \langle X_i(F(u)), X_j(F(u)) \rangle = \left\langle \frac{\partial F}{\partial u_i}(u), \frac{\partial F}{\partial u_j}(u) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial F' \circ \varphi}{\partial u_i}(u), \frac{\partial F' \circ \varphi}{\partial u_j}(u) \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=1}^2 \frac{\partial F'}{\partial u'_k}(\varphi(u)) \frac{\partial \varphi_k}{\partial u_i}(u), \sum_{k=1}^2 \frac{\partial F'}{\partial u'_k}(\varphi(u)) \frac{\partial \varphi_k}{\partial u_j}(u) \right\rangle \\ &= \sum_{k,l=1}^2 \frac{\partial \varphi_k}{\partial u_i}(u) g'_{kl}(F'(u')) \frac{\partial \varphi_l}{\partial u_j}(u) \end{aligned}$$

En notant $G = (g_{i,j})$, $G' = (g'_{i,j})$ et J la jacobienne de $\varphi : (\frac{\partial \varphi_k}{\partial u_i})_{k,i}$, on obtient $G = J^t G' J$. La formule de changement de variables conclut. ■

On notera alors

$$\int_S f \, ds = \int_U f \circ F(u) \sqrt{\det G(F(u))} \, du_1 \, du_2$$

Si la fonction f n'est pas à support dans un seul ouvert de paramétrage, on écrit f comme somme de fonctions C^∞ , chacune à support dans un ouvert de paramétrage. On peut oublier les parties de mesure nulle.

Les isométries conservent donc les mesures d'aires.

2.3 Étude au second ordre

2.3.1 Orientabilité

Définition 2.9 Une surface régulière de \mathbb{R}^3 est dite orientable ssi elle admet un recouvrement ouvert $(S \cap V_\alpha)_{\alpha \in A}$ par des ouverts de paramétrage $F_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ tel que pour tout α, β , $\varphi_{\beta,\alpha} = F_\beta^{-1} F_\alpha : F_\alpha^{-1}(S \cap V_\alpha \cap V_\beta) \rightarrow F_\beta^{-1}(S \cap V_\alpha \cap V_\beta)$ vérifie que pour tout $u \in F_\alpha^{-1}(S \cap V_\alpha \cap V_\beta)$, $\det(D_u \varphi_{\beta,\alpha}) > 0$.

Définition 2.10 Soit S une surface régulière de \mathbb{R}^3 . Un champ de vecteurs normaux C^∞ sur S est une application $C^\infty N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ tel que pour tout $p \in S$, $N(p) \in (T_p S)^\perp$.

Proposition 2.6 Orientabilité dans \mathbb{R}^3 Une surface régulière de \mathbb{R}^3 est orientable ssi elle admet un champ de vecteurs normaux unitaires C^∞ global.

Exemple 2.5 Une sphère est orientable, de même qu'un ellipsoïde.

Démonstration. Si S est orientable, alors on choisit un recouvrement $(V_\alpha \cap S)$ par des ouverts de paramétrage sur lesquels on choisit $N^\alpha(F(u)) = \frac{D_u F_\alpha(e_1) \wedge D_u F_\alpha(e_2)}{\|D_u F_\alpha(e_1) \wedge D_u F_\alpha(e_2)\|}$.

Sur $S \cap V_\alpha \cap V_\beta$, on a deux bases directes $(D_u F_\alpha(e_1), D_u F_\alpha(e_2), N^\alpha)$ et $(D_u F_\beta(e_1), D_u F_\beta(e_2), N^\beta)$ et N^α, N^β sont orthogonaux à $T_p S$ et unitaires donc égaux ou opposés. Comme les deux bases ont même orientation, $N^\alpha = N^\beta$.

Réciproquement, si on a un tel N , pour chaque paramétrisation $F : U \rightarrow V$, on choisit $(u, v) \mapsto F(u, v)$ ou $(v, u) \mapsto F(u, v)$ de sorte que la base obtenue soit directe. ■

2.3.2 Seconde forme fondamentale

Soit S une surface régulière orientable de \mathbb{R}^3 avec un champ global C^∞ de vecteurs normaux unitaires $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ (appelée application de Gauß).

On considère $d_p N : T_p S \rightarrow T_{N(p)} \mathbb{S}^2$ mais $T_{N(p)} = T_p S$ donc $d_p N$ est un endomorphisme. On appelle alors $W_p = -d_p N$ l'endomorphisme de Weingarten.

Proposition 2.7 Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière orientable avec champ de vecteurs normaux N . Alors W_p est auto-adjoint pour la première forme fondamentale I_p .

Démonstration. On prend $F : U \rightarrow V$ un paramétrage local, $X_1 = \frac{\partial F}{\partial u_1}$ et $X_2 = \frac{\partial F}{\partial u_2}$ base de $T_p S$ (u_1, u_2 coordonnées cartésiennes centrées en p).

$W_p X_i = -d_p N X_i$ et on peut écrire $X_1(p)$ comme le vecteur vitesse d'une courbe bien choisie : $X_1(p) = \frac{\partial F(u_1+t, u_2)}{\partial t} |_{t=0}$. $-W_p X_1$ appartient donc à $T_{N(p)} \mathbb{S}^2$.

Pour tout t , $\langle X_j(u + te_i), N(F(u + te_i)) \rangle = 0$ donc, en redérivant,

$$\langle X_j(p), -W_p X_i \rangle + \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j}(u), N(p) \right\rangle = 0$$

Par Schwarz, $\langle X_i, W_p X_j \rangle = \langle W_p X_i, X_j \rangle$. Cette égalité est vraie sur une base, donc partout :

$$\forall v, w \in T_p S, I_p(v, W_p w) = I_p(W_p v, w)$$

■

Définition 2.11 On appelle seconde forme fondamentale de S en p la forme bilinéaire symétrique associée à W_p :

$$\forall v, v' \in T_p S, \mathbb{I}_p(v, v') = I_p(W_p(v), v')$$

Comme W_p est auto-adjoint dans l'espace euclidien $(T_p S, I_p)$, $T_p S$ admet une base orthonormée pour I_p de vecteurs propres de W_p . Les directions correspondantes sont appelées directions principales.

On appelle courbure de Gauss de S en p le nombre $\kappa(p) = \det W_p$, courbure moyenne le réel $H(p) = \frac{\text{tr}(W_p)}{2}$ et vecteur de courbure moyenne le vecteur $\mathcal{H}(p) = H(p)N_p$, qui ne dépend pas du choix de $\pm N$ comme champ de vecteurs normaux.

Exemple 2.6 $X_i(p) = \frac{\partial F}{\partial u_i}(u)$. Notons G la matrice $(\langle X_i(p), X_j(p) \rangle)_{i,j}$ la matrice de la première forme fondamentale en $p = F(u)$. En notant $F = (X, Y, Z)$, on a $X_i = (\frac{\partial X}{\partial u_i}, \frac{\partial Y}{\partial u_i}, \frac{\partial Z}{\partial u_i})$.

L'application $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ est donnée par $u \mapsto (N_X(u), N_Y(u), N_Z(u))$.

W_p est un endomorphisme de $T_p S$.

$$W_p(X_1(p)) = -(d_p N_p)(X_1(p)) = - \left. \frac{\partial N_{F(u+te_1)}}{\partial t} \right|_{t=0} \in T_p S$$

Notons H la matrice de I_p dans $(X_1(p), X_2(p))$. Si $X, X' \in T_p S$ avec $X = (x_1, x_2)$, $X' = (x'_1, x'_2)$ dans la base $(X_1(p), X_2(p))$.

$$I_p(X, X') = X^t G X \text{ et}$$

$$I_p(X, X') = X^t H X' = I_p(W_p(X), X') = (W X)^t G X' = X^t W^t G W$$

Donc $H = W^t G$. Comme $I_p(W_p(X), X') = I_p(X, W_p(X'))$, on a aussi $H = G W$.

2.3.3 Courbure normale

Soit S une surface régulière orientée de \mathbb{R}^3 et $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$.

On a défini la courbure de la courbe c par $\kappa(0) = \|\ddot{c}(0)\|$ et si $\kappa(0) \neq 0$, on définit le vecteur normal à c en 0 par $n_{c,0} = \frac{\ddot{c}(0)}{\|\ddot{c}(0)\|}$.

On cherche à décomposer la courbure et le vecteur accélération de la courbe c en deux contributions : le courbure de la surface S et la courbure de c dans S .

Définition 2.12 On définit la courbure normale de c en 0 par $K_{\text{norm},c}(0) = \langle \ddot{c}(0), N_p \rangle = \kappa(0) \langle n_\perp, N_p \rangle$ avec n_\perp la composante de $n_{c,0}$ sur $(T_p S)^\perp$.

THÉORÈME 2.1 $K_{\text{norm},c}(0) = \langle \ddot{c}(0), N_p \rangle = \mathbb{I}_p^S(\dot{c}(0), \dot{c}(0))$ qui ne dépend que de la surface S et de la direction tangente $\dot{c}(0)$, mais pas vraiment de la courbe c .

Définition 2.13 On peut donc définir la courbure normale de la surface S dans la direction $v \in T_p S$ par $\kappa_{\text{norm},c}(p, v) = \kappa_{\text{norm},c}(p)$ pour n'importe quelle courbe tracée sur S avec direction v en p .

Démonstration. Pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\langle \dot{c}(t), N_{c(t)} \rangle = 0$. En dérivant en $t = 0$,

$$\langle \ddot{c}(0), N_p \rangle + \left\langle \dot{c}(0), \frac{\partial N_{c(t)}}{\partial t} \right\rangle = 0$$

Donc

$$\kappa_{\text{norm},c}(0) = \langle \dot{c}(0), W_p(\dot{c}(0)) \rangle = \mathbb{I}_p^s(\dot{c}(0), \dot{c}(0)) \quad \blacksquare$$

Remarque 2.4 En fait, si c est la courbe formée par l'intersection de S et du plan affine engendré par N_p, v et passant par p , alors $\kappa_{\text{norm},S}(p, v)$ est la courbure de la courbe plane c car $N_{c(t)}$ est en tout point normal à la courbe c .

THÉORÈME 2.2 DESCRIPTION LOCALE DES SURFACES COMME GRAPHE SUR LEUR PLAN TANGENT Soit S une surface régulière (orientée) de \mathbb{R}^3 , $p \in S$, X_1, X_2 une base orthonormée de $T_p S$ et $N_p = X_1 \wedge X_2$.

Alors il existe une paramétrisation $F : U \rightarrow V$ de S au voisinage de p telle que

- $0 \in U$, $F(0) = p$
- $\frac{\partial F}{\partial u_i}(0) = X_i$ (ie $G = \text{Id}$)
- $dg_{i,j}(0) = 0$
- Au voisinage de 0 , $F(u) = p + u_1 X_1 + u_2 X_2 + \left(\frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq 2} h_{i,j}(0) u_i u_j \right) N_p + O(|u|^3)$, où H est la matrice de \mathbb{I}_p dans la paramétrisation $F : h_{i,j} = \mathbb{I}_p \left(\frac{\partial F}{\partial u_i}, \frac{\partial F}{\partial u_j} \right)$.

Démonstration. On va choisir une première paramétrisation F et la modifier par difféomorphismes locaux. On choisit $F : U \rightarrow V$ avec $0 \in U$ et $F(0) = p$ en translatant U dans \mathbb{R}^2 .

Il existe une base f_1, f_2 de $T_0 \mathbb{R}^2$ telle que $(d_0 F) f_1 = X_1$ et $(d_0 F) f_2 = X_2$ car $d_0 F$ est un isomorphisme de $T_0 \mathbb{R}^2$ sur $T_p S$.

On prend (u_1, u_2) les coordonnées cartésiennes sur \mathbb{R}^2 associées au repère $(0, f_1, f_2)$. Alors $f_1 = \frac{\partial}{\partial u_1}$ et $\frac{\partial F}{\partial u_1}(0) = d_0 F \frac{\partial}{\partial u_1} = X_1$. En particulier, $G = \text{Id}$.

Le développement limité de $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ par rapport aux coordonnées (u_1, u_2) à l'ordre 3 est

$$\begin{aligned} F(u_1, u_2) &= F(0) + \frac{\partial F}{\partial u_1}(0) u_1 + \frac{\partial F}{\partial u_2}(0) u_2 + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j} u_i u_j + O(|u|^3) \\ &= p + u_1 X_1 + u_2 X_2 + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j}(0), N_p \right\rangle u_i u_j N_p \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i, j, k} \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j}(0), X_k \right\rangle X_k u_i u_j + O(|u|^3) \end{aligned}$$

On considère

$$\psi : \begin{cases} U & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} u_1 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} u_i u_j \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j}(0), X_1 \right\rangle \\ u_2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} u_i u_j \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j}(0), X_2 \right\rangle \end{pmatrix} \end{cases}$$

$\psi(0,0) = (0,0)$, $\psi \in C^\infty$ et $d_{(0,0)}\psi = \text{Id}$. Par le théorème d'inversion locale, ψ est un difféomorphisme local au voisinage de $(0,0)$. On peut donc poser $F' = F \circ \psi^{-1}$ qui est une nouvelle paramétrisation de F au voisinage de p .

On a $F'(0) = F(0) = p$ et $\frac{\partial F'}{\partial u'_1} = d_0 F \left(\frac{\partial \psi^{-1}}{\partial u'_1}(0) \right) = \frac{\partial F}{\partial u_1}(0) = X_1$.

On a aussi

$$\psi^{-1}(u'_1, u'_2) = \begin{pmatrix} u'_1 - \frac{1}{2} \sum_{i,j} u'_i u'_j \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u'_i \partial u'_j}(0), X_1 \right\rangle \\ u'_2 - \frac{1}{2} \sum_{i,j} u'_i u'_j \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u'_i \partial u'_j}(0), X_2 \right\rangle \end{pmatrix} + O(|u|^3)$$

Ainsi, le développement limité de F' au voisinage de 0 par rapport à u'_1, u'_2 est de la forme souhaitée. ■

Toute surface régulière peut d'onc s'écrire au voisinage de tout point p comme graphe d'une application $f : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ de la forme

$$f : \begin{cases} T_p S & \rightarrow (T_p S)^\perp \\ (u_1, u_2) & \mapsto \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i,j \leq 2} h_{i,j}(0) u_i u_j N + O(|u|^3) \end{cases}$$

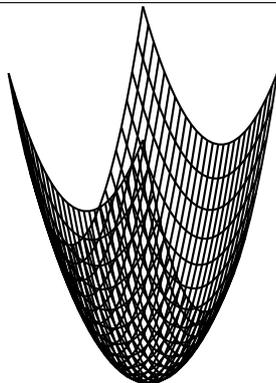
où $(h_{i,j})_{i,j}$ est la matrice de \mathbb{I}_p^S relativement à F .

En effet, on a trouvé une paramétrisation $F : U \rightarrow V$ de S au voisinage de p de la forme

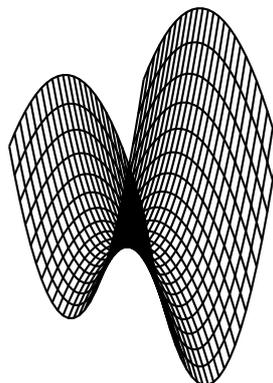
$$F(u_1, u_2) = p + u_1 X_1 + u_2 X_2 + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i,j \leq 2} h_{i,j}(0) u_i u_j N + O(|u|^3)$$

Si \mathbb{I}_p^S est définie positive ou définie négative, la surface est localement isométrique à une surface d'équation $z = ax^2 + by^2$ ie un parabolôïde elliptique.

Si \mathbb{I}_p^S est non dégénérée mais de signe variable, elle est localement isométrique à $z = ax^2 - by^2$ ie un parabolôïde hyperbolique. On dit que p est un point selle.



(a) Paraboloïde elliptique



(b) Paraboloïde hyperbolique

THÉORÈME 2.3 (ADMIS) *Soit S une surface régulière orientable de \mathbb{R}^3 . Si S est compacte alors il existe un point p de S où la courbure de Gauss $\kappa(p) > 0$.*

L'idée de la démonstration est de prendre les points à distance maximale d'une certaine origine de \mathbb{R}^3 affine.

Définition 2.14 Une surface régulière orientée S de \mathbb{R}^3 est dite minimale ssi en tout point $p \in S$, $H_p = 0$.

Exemple 2.7 Un disque est une surface minimale.

THÉORÈME 2.4 *Soit S une surface régulière orientée et d'aire finie, $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs normaux.*

Pour tout t on considère $S_t = \{p + t\phi(p), p \in S$. Pour t assez petit, S_t est une surface régulière et on a

$$\left. \frac{\partial \text{Aire}(S_t)}{\partial t} \right|_{t=0} = -2 \int_S \langle \phi, \mathcal{H} \rangle \, d\text{Aire}$$

(avec $\mathcal{H}_p = H(p)N_p$).

Démonstration. On choisit une paramétrisation régulière $F : U \rightarrow V$ de S au voisinage de p . On choisit un champ de vecteurs normaux unitaires N et on écrit $\phi(F(u)) = f(u)N(F(u))$ pour $f : U \rightarrow \mathbb{R} \in C^\infty$.

Une paramétrisation de S_t est donnée par $F_t : (u_1, u_2) \mapsto F(u_1, u_2) + t\phi(F(u_1, u_2))$. $d_u F$ est de rang 2 donc pour t assez petit et u dans un compact de U , $(d_u F_t)$ est de rang 2. Donc S_t est régulière. On cherche la variation par rapport à t de l'élément d'aire sur S_t . On cherche donc la première forme

2.3. ÉTUDE AU SECOND ORDRE

fondamentale de S_t . $T_{F_t(u)}S_t$ est engendré par $\frac{\partial F_t}{\partial u_1}$ et $\frac{\partial F_t}{\partial u_2}$. On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_t}{\partial u_1} &= \frac{\partial}{\partial u_1}(F(u_1, u_2) + tf(u)N(F(u))) \\ &= \frac{\partial F}{\partial u_1}(u) + t \frac{\partial f}{\partial u_1}(u)N(F(u)) + tf(u)(d_p N) \left(\frac{\partial F}{\partial u_1} \right) \\ &= \underbrace{X_1(u)}_{\in T_p S} + t \underbrace{\frac{\partial f}{\partial u_1}(u)N_p}_{\in (T_p S)^\perp} + tf(u) \underbrace{(d_p N)X_1}_{-W_p(X_1) \in T_p S} \end{aligned}$$

On a

$$\left\langle \frac{\partial F_t}{\partial u_1}, \frac{\partial F_t}{\partial u_1} \right\rangle = \langle X_1, X_1 \rangle - 2tf(u)I_p(X_1, W_p X_1) + O(t^2)$$

Donc $g_{1,1}^{S_t} = g_{1,1}^S - 2tf(u)h_{1,1}^S$ et $g_{i,j}^{S_t} = g_{i,j}^S - 2tf(u)h_{i,j}^S + O(t^2)$. Ensuite,

$$\begin{aligned} \det(g_{i,j}^{S_t}) &= \det(g_{i,j}^S - 2tf(u)h_{i,j}^S + O(t^2)) \\ &= \det(g_{i,j}^S)(1 + 2 \operatorname{tr}(-tf(u)W_p^S)) + O(t^2) \\ &= \det(g_{i,j}^S)(1 - 4tf(u)H) + O(t^2) \end{aligned}$$

On a enfin $d \text{Aire} = \sqrt{\det(g_{i,j})} du_1 du_2$ donc

$$\begin{aligned} dA^{S_t} &= dA^S \sqrt{1 - 4tf(u)H} = dA^S - 2tf(u)H dA^S \\ &= dA^S - 2t\langle \phi, \mathcal{H} \rangle dA^S + O(t^2) \end{aligned}$$

D'où le résultat ($\phi = fN$ et $\mathcal{H} = HN$). ■

Chapitre 3

Géométrie intrinsèque des surfaces

3.1 Géométrie intrinsèque

Définition 3.1 Soit S_1 et S_2 deux surfaces régulières de \mathbb{R}^3 . Une isométrie locale $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ est une application C^∞ telle que

$$\forall p \in S_1, \forall V, W \in T_p S_1, I_{\varphi(p)}^{S_2}(d\varphi_p V, d\varphi_p W) = I^{S_2}(V, W)$$

Remarque 3.1 La différentielle d'une isométrie locale entre deux surfaces est partout de rang 2. Une isométrie locale est un difféomorphisme local.

Définition 3.2 Une isométrie $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ est une isométrie locale bijective. C'est donc en particulier un difféomorphisme.

Définition 3.3 Une quantité intrinsèque $Q(p)$ en $p \in S$ surface régulière est une quantité telle que pour toute isométrie locale $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ et pour tout $p \in S_1$, $Q^{S_2}(\varphi(p)) = Q^{S_1}(p)$.

3.2 Champ de vecteurs sur les surfaces

Définition 3.4 Un champ de vecteurs v sur une surface régulière S est une application $v : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que pour tout $p \in S$, $v(p) \in T_p S$.

Un champ de vecteurs est dit C^∞ ssi lu dans une paramétrisation $F : U \rightarrow V$, il est de classe C^∞ , ou de façon équivalente, si on note $X_i(u) = \frac{\partial F}{\partial u_i}(u)$ et $v(F(u)) = v^1(u)X_1(u) + v^2(u)X_2(u)$, v est de classe C^∞ ssi v^1 et v^2 le sont.

Exemple 3.1 On considère une application $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ . Pour $p \in S$, $df_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire.

I_p est un produit scalaire non dégénéré sur $T_p S$. Il existe donc $\overrightarrow{\text{grad}} f \in T_p S$ tel que pour tout $X \in T_p S$, $df_p(X) = I_p(\overrightarrow{\text{grad}} f, X)$.
 $p \mapsto \overrightarrow{\text{grad}} f_p$ est un champ de vecteurs sur S .

Exemple 3.2 $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Si $p = (x_0, y_0, z_0)$, $T_p S = \{x_0 X + y_0 Y + z_0 Z = 0\}$.

Prenons $f : (x, y, z) \mapsto z$. On a $df_p : (x, y, z) \mapsto z = \langle \pi_p(0, 0, 1), (x, y, z) \rangle$ avec π_p la projection orthogonale sur $T_p S$. Alors

$$\overrightarrow{\text{grad}} f_p = \pi_p(0, 0, 1) = (-z_0 x_0, -z_0 y_0, 1 - z_0^2)$$

Montrons que si $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^∞ , $\overrightarrow{\text{grad}} f$ est C^∞ sur S . On pose $\tilde{f} = f \circ F$.

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_1}(u) = df_{F(u)} \frac{\partial F}{\partial u_1}(u) = I_{F(u)} \left(\overrightarrow{\text{grad}} f_p, \frac{\partial F}{\partial u_1}(u) \right)$$

On note $X_i = \frac{\partial F}{\partial u_i}$ et a_i les coordonnées de $\overrightarrow{\text{grad}} f_p$ sur $(X_1(u), X_2(u))$. L'équation précédente devient

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_i}(u) = a_1 g_{1,i} + a_2 g_{2,i}$$

On note $g^{i,j}$ les coefficients de $G^{-1}(u)$. Alors

$$\begin{cases} a^1(u) = g^{1,1}(u) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_1}(u) + g^{2,1}(u) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_2}(u) \\ a^2(u) = g^{1,2}(u) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_1}(u) + g^{2,2}(u) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_2}(u) \end{cases}$$

qui sont donc C^∞ .

Définition 3.5 Soit S une surface régulière de \mathbb{R}^3 et $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée tracée sur S .

Un champ de vecteurs sur S le long de c est une application $v : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que pour tout $t \in I$, $v(t) \in T_{c(t)} S$.

Exemple 3.3 $t \mapsto \dot{c}(t)$ est un champ de vecteurs sur S le long de c .

$t \mapsto \ddot{c}(t)$ n'est en général pas tangent à S en $c(t)$.

Définition 3.6 La dérivée covariante $\frac{\nabla}{dt} v(t)$ d'un champ de vecteurs C^∞ sur S le long de c est par définition

$$\frac{\nabla}{dt} v(t) = \pi_{c(t)}(\dot{v}(t))$$

avec $\pi_{c(t)}$ la projection orthogonale sur $T_{c(t)} S$.

$t \mapsto \frac{\nabla}{dt} v(t)$ est alors un champ de vecteurs C^∞ sur S le long de C .

Proposition 3.1 L'opérateur $\frac{\nabla}{dt}$ est additif et on a, si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $\varphi : J \rightarrow I$ changement de paramétrage :

- $\frac{\nabla f v}{dt}(t) = f(t) \frac{\nabla v}{dt}(t) + \dot{f}(t)v(t)$
- $\frac{\nabla v \circ \varphi}{ds}(s) = \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s) \frac{\nabla v}{dt}(\varphi(s))$
- $\frac{\partial}{\partial t} I_{c(t)}(v(t), w(t)) = I_{c(t)}\left(\frac{\nabla v}{dt}(t), w(t)\right) + I_{c(t)}\left(v(t), \frac{\nabla w}{dt}(t)\right)$

3.3 Calcul en coordonnées

Soit F une paramétrisation locale de S , $c : I \rightarrow V \subset S$ une paramétrisation de la courbe $C \cap V$, $X_i = \frac{\partial F}{\partial u_i}$.

Le champ de vecteurs $v : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ sur S le long de C est donné par

$$\begin{aligned} v(t) &= v^1(t)X_1(F^{-1}(c(t))) + v^2(t)X_2(F^{-1}(c(t))) \\ &= v^1(t)X_1(\tilde{c}(t)) + v^2(t)X_2(\tilde{c}(t)) \end{aligned}$$

On a pour $i, j \in \{1, 2\}$,

$$\frac{\partial X_i}{\partial u_j}(u) = \Gamma_{i,j}^1(u)X_1(u) + \Gamma_{i,j}^2(u)X_2(u) + \alpha_{i,j}N(u)$$

Par les relations de Schwarz, $\Gamma_{i,j}^k = \Gamma_{j,i}^k$.

$$\begin{aligned} \frac{\nabla v}{dt} &= \frac{\nabla}{dt}(v^1(t)X_1(\tilde{c}(t)) + v^2(t)X_2(\tilde{c}(t))) \\ &= \sum_{k=1}^2 \left(\dot{v}^k(t) + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{i,j}^k(\tilde{c}(t))\tilde{c}^i(t)v^j(t) \right) X_k(\tilde{c}(t)) \end{aligned}$$

Les $\Gamma_{i,j}^k(u)$ sont appelés symboles de Christoffel. On les calcule par

$$\Gamma_{i,j}^k(u) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^2 \left(\frac{\partial g_{j,n}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i,n}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{i,j}}{\partial u_n} \right) g^{m,k}$$

qui ne dépendent que de la première forme fondamentale $I_{F(u)}$.

Définition 3.7 Soit S une surface régulière de \mathbb{R}^3 et v un champ de vecteurs sur S . Soit $p \in S$ et $V_p \in T_p S$.

On définit la dérivée covariante de v dans la direction V_p de la façon suivante : on choisit une courbe $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S$ tel que $c(0) = p$ et $\dot{c}(0) = V_p$ et on pose

$$\nabla_{V_p} v = \left. \frac{\nabla v \circ c}{dt} \right|_{t=0}$$

Cette définition ne dépend pas du choix de la courbe c choisie.

Remarque 3.2 Si v et V sont deux champs de vecteurs C^∞ sur S alors $\nabla_V v$ est un champ de vecteurs C^∞ sur S .

Définition 3.8 Soit $p \in S$, $V \in T_p S$, $v : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs. La dérivée covariante de v dans la direction V est

$$\nabla_V v = \left. \frac{\nabla v(c(t))}{dt} \right|_{t=0} \in T_p S$$

où $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S$ est une courbe paramétrée avec $c(0) = p$ et $\dot{c}(0) = V$.

Proposition 3.2

- (i) ∇_V et $\nabla \cdot v$ sont linéaires.
- (ii) Si $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ est C^∞ sur S , on a

$$\nabla_V(fv) = f\nabla_V v + (d_V f)v \text{ et } \nabla_{fV} v = f\nabla_V v$$

- (iii) $\nabla_{fV} v = f\nabla_V v$
- (iv) $d_V I(v_1, v_2) = I(\nabla_V v_1, v_2) + I(v_1, \nabla_V v_2)$
- (v) Si $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ est une isométrie locale

$$d_p \varphi(\nabla_{V_1}^{S_1} v_1) = \nabla_{d\varphi(V_1)}^{S_2} (d\varphi(v_1))$$

Démonstration. On démontre (ii) et (v). Soit $p \in S \cap W$, $V_1 \in T_p S$ et $V_2 \in T_p S$. On note $X_i(u) = \frac{\partial F}{\partial u_i}(u)$.

On a $V_1 = a^1 X_1(0) + a^2 X_2(0)$ et $V_2 = b^1 X_1(0) + b^2 X_2(0)$. $c_1 : t \mapsto F(a^1 t, a^2 t)$ est un chemin sur S avec $c_1(0) = p$ et $\dot{c}_1(0) = V_1$.

$c_2 : t \mapsto F(b^1 t, b^2 t)$ vérifie $c_2(0) = p$ et $\dot{c}_2(0) = V_2$. Enfin, $c_3 : t \mapsto F((a^1 + b^1)t, (a^2 + b^2)t)$ vérifie $c_3(0) = p$ et $\dot{c}_3 = V_1 + V_2$. Alors

$$\begin{aligned} \nabla_{V_1} v &= \frac{\nabla v(c_1(t))}{dt} = \frac{\nabla v(F(a^1 t, a^2 t))}{dt} \\ &= \pi_p \left(\frac{\partial v(F(a^1 t, a^2 t))}{\partial t} \right) \\ &= a^1 \pi_p(d_p v X_1) + a^2 \pi_p(d_p v X_2) \\ &= a^1 \nabla_{X_1} v + a^2 \nabla_{X_2} v \end{aligned}$$

Par linéarité de la formule, on a (ii). Pour (v), on écrit le champ v sur $S \cap W$ comme

$$v(F(u)) = v^1(F(u))X_1(u) + v^2(F(u))X_2(u)$$

On avait noté

$$\frac{\partial X_i}{\partial u_j}(u) = \Gamma_{j,i}^1 X_1(u) + \Gamma_{j,i}^2 X_2(u) + \alpha_{j,i} N(u)$$

Donc

$$\begin{aligned} (\nabla_{X_1} v)_p &= \pi_p \left(\frac{\partial v(F(t, 0))}{\partial t} \right) \\ &= \pi_p \left(\frac{\partial v^1(F(t, 0))X_1(t, 0) + v^2(F(t, 0))X_2(t, 0)}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

En remettant des symboles de Christoffel, on trouve

$$\nabla_{X_1} v = d_p v^1(X_1)X_1(0) + d_p v^2(X_2)X_2(0) + \sum_{1 \leq i, k \leq 2} \Gamma_{1,i}^k X_k v^i$$

Soit $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ une isométrie locale. On choisit alors comme paramétrage de $S_2 \cap W_2$ la composée $\varphi \circ F$. Dans S_1 ,

$$\frac{\partial F}{\partial u_1} = X_1 \text{ et } \frac{\partial F}{\partial u_2} = X_2$$

forment une base de $T_{F(u)}S_1$. Dans S_2 , $\frac{\partial \varphi \circ F}{\partial u_1} = d\varphi_{F(u)}(X_1)$ et $d\varphi_{F(u)}(X_2)$ est une base de $T_{\varphi \circ F(u)}S_2$. Les coordonnées $v^1(F(u))$ et $v^2(F(u))$ de $v(F(u))$ dans la base $(X_1(u), X_2(u))$ sont exactement celles de $d_{F(u)}\varphi(v(F(u)))$ dans la base $(d_{F(u)}(X_1(u)), d_{F(u)}\varphi(X_2(u)))$. Puisque φ est une isométrie locale,

$$g_{i,j}^{S_1} = I^{S_2}(d\varphi(X_i), d\varphi(X_j)) = I^{S_1}(X_i, X_j) = g_{i,j}^{S_1}$$

Les matrices de I^{S_1} et I^{S_2} sont les mêmes dans les bases précédents. Donc les symboles de Christoffel sont les mêmes/ Comme $\nabla_V v$ ne dépend que des coordonnées v^1, v^2 et des $\Gamma_{i,j}^k$, la formule (v) est démontrée. ■

3.4 Dérivée seconde covariante et endomorphisme de courbure

Remarque 3.3 Dans une paramétrisation locale, on écrit $V = V^1 X_1 + V^2 X_2$. On a

$$\begin{aligned} \nabla_W(\nabla_V v) &= \nabla_W(V^1 \nabla_{X_1} v + V^2 \nabla_{X_2} v) \\ &= (dV^1)(W) \nabla_{X_1} v + (dV^2)(W) \nabla_{X_2} v \\ &\quad + V^1 \nabla_W \nabla_{X_1} v + V^2 \nabla_W \nabla_{X_2} v \end{aligned}$$

$\nabla_{\nabla_W V} v$ a la même partie différentielle en V^1 et V^2 , à savoir :

$$(dV^1)(W) \nabla_{X_1} v + (dV^2)(W) \nabla_{X_2} v$$

Définition 3.9 On définit la dérivée seconde covariante d'un champ de vecteurs v sur S dans les directions V et W par :

$$\nabla_{WV}^2 v = \nabla_W(\nabla_V v) - \nabla_{\nabla_W V} v$$

qui est bien linéaire en V et W .

Définition 3.10 On définit l'endomorphisme de courbure par

$$R(W, V)v = \nabla_{WV}^2 v - \nabla_{VW}^2 v$$

Pour tout $f : S \rightarrow \mathbb{R} C^\infty$, $R(W, V)(fv) = fR(W, V)v$.

Pour tout $V_p, W_p \in T_p S$, $R(W_p, V_p)$ est un endomorphisme de $T_p S$.

THÉORÈME 3.1

- L'endomorphisme de courbure est une quantité intrinsèque (qui ne dépend que de la première forme fondamentale) comme les dérivées covariantes.
- Équation de Gauss :

$$R(V, W)v = \mathbb{I}(W, v)Wein(V) - \mathbb{I}(V, v)Wein(W)$$

THÉORÈME 3.2 EGREGIUM Soit S une surface régulière de \mathbb{R}^3 , $p \in S$, (V, W) une base orthonormée de $T_p S$. La courbure de Gauss $K(p)$ en p se calcule par

$$K(p) = I(R_p(V, W)W, V)$$

C'est donc une quantité intrinsèque.

Démonstration.

$$\begin{aligned} I(R(V, W)W, V) &= I(\mathbb{I}(W, W)Wein(V) - \mathbb{I}(V, W)Wein(W), v) \\ &= \mathbb{I}(W, W)I(Wein(V), V) - \mathbb{I}(V, W)I(Wein(W), V) \\ &= \mathbb{I}(W, W)\mathbb{I}(V, V) - \mathbb{I}(V, W)\mathbb{I}(W, V) \\ &= \det(Wein) = K(p) \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Proposition 3.3

- (i) $R_p(v, u)x = -R_p(u, v)w$
- (ii) $I(R_p(u, v)w, x) = -I(w, R_p(u, v)x)$
- (iii) (Bianchi) $R(u, v)w + R(v, w)u + R(w, u)v = 0$
- (iv) $R(u, v)w = \kappa(p)(I(v, w)u - I(u, w)v)$

3.4. DÉRIVÉES COVARIANTES ET COURBURE

On prend $F : U \rightarrow V$ un paramétrage local de la surface régulière S de \mathbb{R}^3 . On pose $X_i(u) = \frac{\partial F}{\partial u_i}(u)$ base de $T_{F(u)}S$.

Il suffit de connaître $R(X_i, X_j)X_k$ pour connaître $R(u, v)w$ pour tous $(u, v, w) \in T_pS$ puisque $R(\cdot, \cdot)\cdot$ est linéaire par rapport à chaque argument. On écrit

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_{l=1}^2 R_{i,j,k}^l X_l$$

Si G est la matrice de la première forme fondamentale et $G^{-1} = (g^{i,j})_{i,j}$, les symboles de Christoffel sont donnés par

$$\Gamma_{i,j}^k = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^2 \left(\frac{\partial g_{i,m}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j,m}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{i,j}}{\partial u_m} \right) g^{k,m}$$

et vérifient $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{i,j}^k X_k$, ce qui suffit pour connaître $\nabla_u v$.

Les coefficients de courbure $R_{i,j,k}^l$ sont donnés par

$$R_{i,j,k}^l = \frac{\partial \Gamma_{k,j}^l}{\partial u_i} - \frac{\partial \Gamma_{k,i}^l}{\partial u_j} + \sum_{m=1}^2 (\Gamma_{m,i}^l \Gamma_{k,j}^m - \Gamma_{m,j}^l \Gamma_{k,i}^m)$$

qui vérifient

$$\nabla_{X_i X_j}^2 X_k - \nabla_{X_j X_i}^2 X_k = R(X_i, X_j)X_k = \sum_{l=1}^2 R_{i,j,k}^l X_l$$

Finalement, on trouve aussi

$$\kappa(p) = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} g^{j,k} R_{i,j,k}^i$$

Chapitre 4

Métriques riemanniennes

Définition 4.1 Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière. La donnée d'une métrique riemannienne g sur S est la donnée en tout point p de S d'un produit scalaire g_p sur $T_p S$ dont les coefficients dans la paramétrisation F dépendent de manière C^∞ de u .

On peut alors pour tout champ de vecteurs définir $\nabla_u v$ la dérivée covariante, l'endomorphisme de courbure, la courbure de Gauss, et toutes les grandeurs intrinsèques.

Exemple 4.1

- La première forme fondamentale est une métrique riemannienne.
- On paramètre un tore par

$$(\theta, \varphi) \mapsto (\cos \theta(3 + \cos \varphi), \sin \theta(3 + \cos \varphi), \sin \varphi)$$

En tout point X_θ et X_φ sont indépendants. On peut définir une métrique riemannienne sur ce tore en posant $g(X_\theta, X_\varphi) = 0$, $g(X_\theta, X_\theta) = g(X_\varphi, X_\varphi) = 1$. L'endomorphisme de courbure du tore est alors nul, de même que la courbure de Gauss en tout point.

Remarque 4.1 Pour les surfaces compactes de \mathbb{R}^3 avec la première forme fondamentale comme métrique riemannienne, il y a toujours un point avec courbure de Gauss strictement positive.

4.1 Géodésiques

Soit S une surface régulière munie d'une métrique riemannienne g et $c : [a, b] \rightarrow S$ une courbe paramétrée tracée sur S . La longueur de c est définie par

$$L[c] = \int_a^b \sqrt{g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))} dt$$

qui ne dépend pas du paramétrage. L'énergie de c est définie par

$$E[c] = \frac{1}{2} \int_a^b \|\dot{c}(t)\|_g^2 dt = \frac{1}{2} \int_a^b g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) dt$$

qui dépend du paramétrage.

Proposition 4.1 Pour c tracée sur S munie de g , on a

$$(L[c])^2 \leq 2(b-a)E[c]$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} L[c]^2 &= \left(\int_a^b \sqrt{g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))} dt \right)^2 \\ &\leq \int_a^b 1 \int_a^b g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) dt \\ &\leq (b-a) \times 2E[c] \end{aligned}$$

avec égalité ssi $t \mapsto g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))$ est proportionnelle à 1 ie est constant ssi c est paramétrée proportionnellement à la longueur d'arc. ■

Lemme 4.0.1

Soit S une surface régulière de \mathbb{R} avec une métrique g . Soit

$$c : \begin{cases} I \times [a, b] & \rightarrow S \\ (s, t) & \mapsto c(s, t) = c_s(t) \end{cases}$$

$$\dot{c}(s, t) = \frac{\partial c}{\partial t}(s, t) = \dot{c}_s(t) \text{ et } V(s, t) = \frac{\partial c}{\partial s}(s, t). \text{ On a}$$

$$\nabla_{V(s,t)} \dot{c}_s(t) = \nabla_{\dot{c}_s(t)} V(s, t)$$

Démonstration. Comme c arrive sur S , on peut définir $\tilde{c}(s, t) = F^{-1}(c(s, t))$. On a alors $c(s, t) = (F \circ \tilde{c})(s, t)$. On a

$$\frac{\partial c}{\partial t}(s, t) = d_{\tilde{c}(s,t)} F \frac{\partial \tilde{c}}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial t} X_1 + \frac{\partial \tilde{c}_2}{\partial t} X_2$$

$V(s, t) = \frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial s} X_1 + \frac{\partial \tilde{c}_2}{\partial s} X_2$. On a

$$\begin{aligned}
 \nabla_{V(s,t)} \dot{c}(t) &= \nabla_V \left(\frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial t} X_1 + \frac{\partial \tilde{c}_2}{\partial t} X_2 \right) \\
 &= d_V \left(\frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial t} \right) X_1 + \frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial t} \nabla_V X_1 + d_V \left(\frac{\partial \tilde{c}_2}{\partial t} \right) X_2 + \frac{\partial \tilde{c}_2}{\partial t} \nabla_V X_2 \\
 &= \frac{\partial^2 \tilde{c}_1}{\partial s \partial t} X_1 + \frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial t} \left(\frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial s} \nabla_{X_1} X_1 + \frac{\partial \tilde{c}_2}{\partial s} \nabla_{X_2} X_1 \right) \\
 &\quad + \frac{\partial^2 \tilde{c}_2}{\partial s \partial t} X_2 + \frac{\partial \tilde{c}_2}{\partial t} \left(\frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial s} \nabla_{X_1} X_2 + \frac{\partial \tilde{c}_2}{\partial s} \nabla_{X_2} X_2 \right) \\
 &= \frac{\partial^2 \tilde{c}_1}{\partial s \partial t} X_1 + \frac{\partial^2 \tilde{c}_2}{\partial s \partial t} X_2 + \sum_{1 \leq i, j, k \leq 2} \frac{\partial \tilde{c}_i}{\partial t} \frac{\partial \tilde{c}_j}{\partial s} \Gamma_{j,i}^s X_k
 \end{aligned}$$

La formule précédente est symétrique en i, j donc $\nabla_V \dot{c}$ est symétrique en s et t et $\nabla_V \dot{c} = \nabla_{\dot{c}} V$. ■

THÉORÈME 4.1 FORMULE DE VARIATION DE L'ÉNERGIE *Soit S une surface régulière de \mathbb{R}^3 munie d'une métrique riemannienne g . Soit $(p, q) \in S^2$ et $c :] - \varepsilon, \varepsilon[\times]a, b[\rightarrow S$ une famille de chemins à extrémités fixées p et q .*

Alors

$$\left. \frac{\partial E[c_s]}{\partial s} \right|_{s=0} = - \int_a^b g_{c_0(t)}(V(0, t), \nabla_{\dot{c}_0(t)} \dot{c}_0(t)) dt$$

Démonstration. Comme pour tout $s \in] - \varepsilon, \varepsilon[$, $c_s(a) = p$ et $c_s(b) = q$, on a $V(0, a) = V(0, b) = 0$. On sait que

$$E[c_s] = \frac{1}{2} \int_a^b g_{c_s(t)}(\dot{c}(s, t), \dot{c}(s, t)) dt$$

Ainsi, en dérivant en $s = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E[c_s]}{\partial s} &= \frac{1}{2} \int_a^b g_{c_s(t)}(\nabla_V \dot{c}(s, t), \dot{c}(s, t)) + g_{c_s(t)}(\dot{c}(s, t), \nabla_V \dot{c}(s, t)) dt \\
 &= \int_a^b g_{c_s(t)}(\nabla_V \dot{c}(s, t), \dot{c}(s, t)) \\
 &= \int_a^b g_{c_s(t)}(\nabla_{\dot{c}}, \dot{c}) \\
 &= \int_a^b \frac{\partial g_{c_s(t)}(V, \dot{c})}{\partial t} - g_{c_s(t)}(V, \nabla_{\dot{c}} \dot{c}) dt \\
 &= [g_{c_0(t)}(V, \dot{c})]_a^b - \int_a^b g_{c_0(t)}(V(0, t), \nabla_{\dot{c}_0(t)} \dot{c}_0(t)) dt \\
 &= - \int_a^b g_{c_0(t)}(V(0, t), \nabla_{\dot{c}_0(t)} \dot{c}_0(t)) dt
 \end{aligned}$$

COROLLAIRE 4.1 *Si une courbe c a une énergie minimale parmi ses êtites déformations à extrêmités fixées; pour tout $t \in [a, b]$, $\nabla_{\dot{c}(t)}\dot{c}(t) = 0$.*

Définition 4.2 On appelle géodésique sur une surface riemannienne une courbe paramétrée telle que pour tout $t \in [a, b]$, $\nabla_{\dot{c}(t)}\dot{c}(t) = 0$.

Proposition 4.2 Une géodésique est paramétrée proportionnellement à la longueur d'arc : il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout t , $g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) = A$.

Exemple 4.2 Sur la sphère unité avec une métrique riemannienne obtenue par restriction du produit scalaire de \mathbb{R}^3 . Aucun cercle ne vérifie

$$\nabla_{\frac{\partial c_\varphi}{\partial \theta}} \frac{\partial c_\varphi}{\partial \theta} = 0$$

sauf si $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Les géodésiques sont donc des morceaux de grands cercles.

4.2 Géométrie hyperbolique

On considère dans \mathbb{R}^3 la nappe supérieure d'un hyperboloïde : $H = \{(x, y, z), x^2 + y^2 - z^2 = -1, z > 0\}$ et la forme bilinéaire symétrique $\langle x, y \rangle_{-1} = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$.

On pose pour $p \in H$ et $v, v' \in (T_p H)^2$. $g_p(v, v') = \langle v, v' \rangle_{-1}$ dépend de façon C^∞ de $p \in H$.

Vérifions que g_p est définie positive. Le plan tangent en $p = (x, y, z)$ a pour équation $xX + yY - zZ = 0$. De plus

$$\begin{aligned} \|(X, Y, Z)\|_{-1}^2 &= X^2 + Y^2 - Z^2 = X^2 + Y^2 - \left(\frac{xX + yY}{z}\right)^2 \\ &= \frac{X^2 + Y^2 + (Xy - Yx)^2}{z^2} > 0 \end{aligned}$$

On paramètre H par

$$F : \begin{cases}]0, +\infty[\times]0, 2\pi[& \rightarrow \mathbb{R} \\ (\varphi, \theta) & \mapsto (\cos \theta \operatorname{sh} \varphi, \sin \theta \operatorname{sh} \varphi, \operatorname{ch} \varphi) \end{cases}$$

La matrice de g dans (X_φ, X_θ) est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \operatorname{sh}^2 \varphi \end{pmatrix}$$

Les symboles de Christoffel sont tous nuls sauf $\Gamma_{1,2}^2 = \Gamma_{2,1}^2 = \operatorname{coth}(\varphi)$ et $\Gamma_{2,2}^1 = -\operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch} \varphi$. La courbure de Gauss est définie par la formule du théorème

egregium par

$$\kappa(p) = g_p \left(R \left(X_1, \frac{X_2}{\text{sh } \varphi} \right), \frac{X_2}{\text{sh } \varphi}, X_1 \right) = \frac{R_{1,2,2}^1}{\text{sh}^2 \varphi} = -1$$

(H, g) est dite hyperbolique.

$\nabla_{X_\varphi} X_\varphi = 0$ donc les courbes $\varphi \rightarrow F(\theta, \varphi)$ à θ fixé, paramétrées par la longueur d'arc sont des géodésiques.

On a deux isométries

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -\text{ch } \varphi & 0 & \text{sh } \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sh } \varphi & 0 & \text{ch } \varphi \end{pmatrix}$$

Elles transforment les géodésiques en géodésiques. Donc des géodésiques qui passent par p sont les sections planes de l'hyperboloïde par des plans vectoriels qui passent par 0 et p .

Proposition 4.3 Soit S une surface régulière de \mathbb{R}^3 avec une métrique riemannienne g et $c : [a, b] \rightarrow S$ une courbe paramétrée.

Si c minimise l'énergie parmi les courbes de $c(a)$ à $c(b)$ alors $\nabla_{\dot{c}(t)} \dot{c}(t) = 0$ alors c est une géodésique et en particulier,

$$\frac{\partial \|\dot{c}(t)\|_g^2}{\partial t} = \frac{\partial g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))}{\partial t} = g_{c(t)}(\nabla_{\dot{c}(t)} \dot{c}(t), \dot{c}(t)) + g_{c(t)}(\dot{c}(t), \nabla_{\dot{c}(t)} \dot{c}(t)) = 0$$

avec c paramétrée par rapport à la longueur d'arc.

Réciproquement, si c est paramétrée proportionnellement à la longueur d'arc, et si c minimise la longueur parmi les courbes de $c(a)$ à $c(b)$ paramétrées par $[a, b]$ alors c minimise l'énergie et est en particulier une géodésique.

Démonstration. Soit γ un autre chemin. On a par Cauchy-Schwarz :

$$2(b-a)E(\gamma) \geq l(\gamma)^2 \geq l(c)^2 = 2(b-a)E(c)$$

■

Proposition 4.4 Il n'existe pas toujours de courbe minimisante (prendre \mathbb{R}^2 époiné avec la métrique usuelle).

Comme l'équation $\nabla_{\dot{c}(t)} \dot{c}(t) = 0$ est un système d'inconnues $(u_1(t), u_2(t))$, on a

$$\nabla_{\dot{c}(t)} \dot{c}(t) = \nabla_{\dot{c}(t)}(u_1(t)X_1 + u_2(t)X_2)$$

On obtient un système différentiel ordinaire d'ordre 2 donc par Cauchy-Lipschitz, en tout $p \in S$, et $v \in T_p S$ il existe un intervalle $] -\varepsilon, \varepsilon[$ et une

géodésique $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S$ paramétrée par la longueur d'arc avec $c(0) = p$ et $\dot{c}(0) = v$.

Si c' est une autre géodésique vérifiant ces conditions, alors elles coïncident. En particulier dans l'exemple de la géométrie hyperbolique, on a trouvé une géodésique pour tout p, v , on a en fait trouvé toutes les géodésiques.

Chapitre 5

Variétés abstraites

5.1 Définition

Définition 5.1 Soit M un espace topologique (en générale supposé séparé à base dénombrable).

Un paramétrage d'un ouvert W de M est un homéomorphisme $F : U \rightarrow W$ où U est un ouvert de \mathbb{R}^n .

Si F_1 et F_2 sont deux paramétrages d'ouverts W_1 et W_2 le changement de paramétrage de F_1 à F_2 est $F_2^{-1} \circ F_1$ dans les espaces où c'est bien défini.

Un atlas différentiable A de dimension n sur M est la donnée d'un ensemble $A = \{(U_\alpha, F_\alpha), F_\alpha : U_\alpha \rightarrow W_\alpha \text{ paramétrage}\}$ tel que l'union des W_α soit M et les changements de paramétrage $F_\beta^{-1} \circ F_\alpha$ soient des difféomorphismes.

Un atlas A est dit maximal ssi tout paramétrage G d'ouverts de M qui vérifie que $G^{-1} \circ F_\alpha$ est un difféomorphisme pour tout α est en fait déjà dans A . On peut montrer que tout atlas différentiable se complète en un unique atlas différentiable maximal.

Une variété différentiable de dimension n est un espace topologique muni d'un atlas différentiable maximal de dimension n .

Exemple 5.1 Un ouvert de \mathbb{R}^n est une variété différentiable, de même que les surfaces régulières et le plan projectif.

Définition 5.2 On dit qu'une application $f : M \rightarrow M'$ est différentiable ssi pour tout $p \in M$, il existe des paramétrages $F : U \rightarrow W$ et $F' : U' \rightarrow W'$ tel que $f(W) \subset W'$ est $(F')^{-1} \circ f \circ F$ soit C^∞ . Comme les changements de paramétrages sont C^∞ la propriété précédente ne dépend pas des deux paramétrages choisis dans l'atlas.

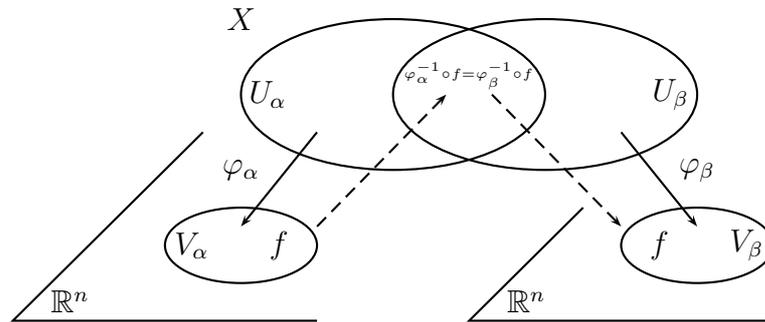


FIGURE 5.1 – Atlas

5.2 Les vecteurs tangents

Pour les surfaces régulières de \mathbb{R}^3 , le plan tangent en un point p se calcule en choisissant une paramétrisation $F : U \rightarrow W$ au voisinage de p et en prenant $\text{Im}(dF_{F^{-1}(p)})$. Si F' est une autre paramétrisation au voisinage de p , on a

$$(F, v) := dF_{F^{-1}(p)}v = dF'_{(F')^{-1}(p)}v' =: (F', v')$$

alors $v' = d((F')^{-1} \circ F)_{F^{-1}(p)}(v)$.

Définition 5.3 Soit (M, A) une variété différentiable de dimension n . Soit $p \in M$. On définit une relation d'équivalence sur $A \times \mathbb{R}^n$ par $(F, v) \sim (F', v')$ ssi $v' = d((F')^{-1} \circ F)_{F^{-1}(p)}v$.

Un vecteur tangent en p est une classe pour cette relation. On la notera $[F, v]$.

Proposition 5.1 Si $F : U \rightarrow W$ est un paramétrage de M au voisinage de p alors

$$\Delta F : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow & T_p M \\ v & \mapsto & [F, v] \end{cases}$$

est une bijection et si F' est un autre paramétrage,

$$(\Delta F')^{-1} \circ (\Delta F) : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ v & \mapsto & v' \text{ tel que } [F', v'] = [F, v] \end{cases}$$

coïncide avec $d_{F^{-1}(p)}((F')^{-1} \circ F)$. C'est donc un isomorphisme linéaire.

Enfin, $T_p M$ possède une unique structure d'ev telle que chaque ΔF soit un isomorphisme linéaire.

Démonstration. Montrons que Δ_F est surjectif. Soit $[F', v'] \in T_p M$, F et F' sont deux paramétrages de M au voisinage de p .

5.3. DIFFÉRENTIELLE D'UNE APPLICATION DIFFÉRENTIABLE

Soit $v = d(F^{-1} \circ F')_{(F')^{-1}(p)}v'$. On a $\Delta_F v = [F, v] = [F', v']$ donc Δ_F est surjectif.

Soient v_1, v_2 tels que $\Delta_F v_1 = \Delta_F v_2$. $[F, v_1] = [F, v_2]$ donc $v_2 = v_1$ et Δ_F est injectif.

Par définition des classes, on a clairement

$$(\Delta F')^{-1} \circ (\Delta F) = d_{F^{-1}(p)}((F')^{-1} \circ F)$$

Soit $p \in M$ et F un paramétrage au voisinage de p . On définit une structure d'espace vectoriel sur $T_p M$ par transport de structure par la bijection Δ_F .

$$[F'', v''] + [F', v'] = \Delta_F(\Delta_F^{-1}[F'', v''] + \Delta_F^{-1}[F', v'])$$

Si F_1 est un autre paramétrage, on peut vérifier que

$$\Delta_{F_1}(\Delta_{F_1}^{-1}[F'', v''] + \Delta_{F_1}^{-1}[F', v']) = \Delta_F(\Delta_F^{-1}[F'', v''] + \Delta_F^{-1}[F', v'])$$

Donc

$$\begin{aligned} & \Delta_F^{-1} \circ \Delta_{F_1}(\Delta_{F_1}^{-1}[F'', v''] + \Delta_{F_1}^{-1}[F', v']) \\ &= (\Delta_F^{-1} \Delta_{F_1}) \Delta_{F_1}^{-1}[F'', v''] + (\Delta_F^{-1} \Delta_{F_1}) \Delta_{F_1}^{-1}[F', v'] \\ &= \Delta_F^{-1}[F'', v''] + \Delta_F^{-1}[F', v'] \end{aligned} \quad \blacksquare$$

5.3 Différentielle d'une application différentiable

Dans le cas des surfaces régulières,

$$\begin{aligned} df_p X &= \frac{\partial f \circ F \circ u}{\partial t}(0) = D(f \circ F)_{u(0)} \dot{u}(0) \\ &= D(F' \circ \tilde{f})_{u(0)} \dot{u}(0) = DF'_{(\tilde{f} \circ u)(0)} d\tilde{f}_{u(0)} \dot{u}(0) \end{aligned}$$

avec $\dot{u}(0) = dF_{c(0)}^{-1} X$ et $(F, \dot{u}(0)) = X = \Delta_F \dot{u}(0)$. Ainsi

$$df_p X = (F', d\tilde{f}_{F^{-1}(p)} \dot{u}(0))$$

Dans le cas des variétés abstraites si $f : M \rightarrow M'$ est une application différentiable entre deux variétés différentiables (M, A) et (M', A') et p un point de M . On définit la différentielle de f en p par

- Le choix d'un paramétrage $F : U \rightarrow W$ de M au voisinage de $p \in W$ et $F' : U' \rightarrow W'$ de M' au voisinage de $f(p) \in W'$.
- $df_p X = [F', d\tilde{F}_{F^{-1}(p)} \Delta_F^{-1} X] = \Delta_{F'}(d\tilde{f}_{F^{-1}(p)} \Delta_F^{-1} X)$.

On peut vérifier que $df_p X$ ne dépend pas des choix de paramétrages. En particulier, si on note $X_k = \Delta_F(\frac{\partial}{\partial u_k}) = [F, \frac{\partial}{\partial u_k}]$ et $Y_l = \Delta_{F'}(\frac{\partial u}{\partial u'_k})$ alors la matrice de df_p dans (X_k, Y_l) est la matrice de $d\tilde{f}_{F^{-1}(p)}$ dans les bases $(\frac{\partial}{\partial u_k}, \frac{\partial}{\partial u'_k})$.

5.4 Les sous-variétés

Si S est une surface régulière de \mathbb{R}^3 , on a vu à l'aide du théorème d'inversion locale que les paramètres locaux F se prolongent en difféomorphismes d'ouverts de \mathbb{R}^3 .

Définition 5.4 Un sous-ensemble S d'une variété différentiable (M, A) de dimension n est appelé sous-variété de M de dimension s si pour tout point p de S , il existe un paramétrage $F : U \rightarrow V$ dans A au voisinage de p tel que $U = U_1 \times U_2$ avec U_1 ouvert de \mathbb{R}^s et U_2 ouvert de \mathbb{R}^{n-s} contenant 0 tel que $F(U_1 \times \{0\}) = S \cap U$.

Exemple 5.2 Les surfaces régulières de \mathbb{R}^3 sont des sous-variétés de dimension 2. Une surface qui se recoupe n'en est pas une.

Remarque 5.1 Si S est une sous-variété de M alors $(S, A|_S)$ est une variété différentiable.

5.5 Inversion locale

Soit $f : M \rightarrow M'$ une application différentiable entre variétés différentiable de même dimension. Soit p un point de M . Si $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} M'$ est un isomorphisme linéaire alors il existe un voisinage ouvert W de p dans M et un voisinage ouvert W' de $f(p)$ dans M' tels que f réalise un difféomorphisme $W \rightarrow W'$.

Définition 5.5 Une application différentiable $f : M \rightarrow M'$ entre deux variétés différentiables est appelée

- immersion ssi pour tout $p \in M$, df_p est injectif
- submersion ssi pour tout $p \in M$, df_p est surjectif
- plongement ssi immersion injective qui réalise un homéomorphisme sur son image

Comme conséquences du TIL, on obtient la forme locale des immersions suivante de la même façon que pour les surfaces régulières de \mathbb{R}^3 .

THÉORÈME 5.1 FORME LOCALE DES IMMERSIONS *Soit $f : M \rightarrow M'$ une immersion. Il existe un paramétrage F de M au voisinage de p et F' de M'*

au voisinage de $f(p)$ tels que $f(W) \subset W'$, $U' = U \times T$, $\tilde{f} = (F')^{-1} \circ f \circ F$ avec $\tilde{f} : x \rightarrow (x, 0)$.

En particulier, $f(W) = F'(U \times \{0\})$ est localement une sous-variété de M' .

Remarque 5.2 L'image d'une variété par une immersion n'est en général pas une sous-variété.

Le cas des submersions généralise les exemples de surfaces définies comme lignes de niveau.

THÉORÈME 5.2 FORME LOCALE DES SUBMERSIONS Soit $f : M \rightarrow M'$ une submersion en $p \in M$. Il existe un paramétrage $F : U \rightarrow W$ de M au voisinage de p et $F' : U' \rightarrow W'$ de M' au voisinage de $f(p)$ tel que $f(W) \subset W'$, $U = T \times U'$ et $\tilde{f} = (F')^{-1} \circ f \circ F$ vérifie

$$\tilde{f} : \begin{cases} T \times U' & \rightarrow & U' \\ (x, y) & \mapsto & y \end{cases}$$

En particulier, $f^{-1}(f(p))$ est localement une sous-variété de M .

Si f est une submersion en tout point de $f^{-1}(p)$ alors $f^{-1}(p)$ est une sous-variété de M et $Tf^{-1}(p) = \text{Ker}(df)$.

Remarque 5.3 L'image d'une variété par un plongement est une sous-variété (difféomorphe à la variété de départ) dont l'espace tangent est l'image par la différentielle du plongement de l'espace tangent de départ.

Définition 5.6 Une métrique riemannienne sur une variété différentiable M est la donnée d'un produit scalaire g_p sur chaque espace tangent T_pM , dont les coefficients, lus par Δ_F^{-1} sont des fonctions C^∞ avec

$$\Delta_F : \begin{cases} U \times \mathbb{R}^n & \rightarrow & \bigcup_q T_q W \\ (u, v) & \mapsto & [F, v]_{F(u)} \end{cases}$$