Licence 3 de Mathématiques | ENS Rennes
EVNCD | 2022-2023

Révisions : Espaces vectoriels normés, espaces métriques, applications linéaires continues

Exercice 1. *Quelques questions*

1. Pour $P \in \mathbf{R}[X]$, on définit
$$\|P\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |P(x)| \quad \text{et} \quad \|P\| := \sum_{k=0}^{\infty} |P^{(k)}(0)|$$
Les normes ainsi définies sont-elles équivalentes sur $\mathbf{R}[X]$? Et sur $\mathbf{R}_n[X]$?
2. Existe-t-il une application $f : \mathbf{R}^d \to \ell^1(\mathbf{N};\mathbf{R})$ qui soit continue, surjective et telle que
$$\|f(x)\|_{\ell^1} \underset{\|x\|\to+\infty}{\to} +\infty.$$
3. L'application définie par $f : (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto (x,1,2y) \in \mathbf{R}^3$ est-elle linéaire continue ?
4. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable. Y a-t-il équivalence entre la stricte croissance de f et le fait que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) > 0$?
5. Une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est-elle lipschitzienne si et seulement si elle est dérivable et f' est bornée sur $\mathbf{R}$?

Exercice 2. *Complétude de l'espace des suites convergentes*

Montrer que l'ensemble des suites convergentes de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ muni de la norme uniforme définie par :
$$\forall u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}},\ \|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbf{N}} |u_n|,$$
est complet.

Exercice 3. *Un calcul de norme*

Soient $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_{L^2}$, $a \in]0,1[$ et $T : E \to \mathbf{R}$ définie par :
$$\forall f \in E,\ Tf = \int_0^a x^2 f(x)\,dx.$$
Montrer que T est bien définie, linéaire, continue et calculer sa norme subordonnée. La valeur de la norme de T est-elle atteinte ?

Exercice 4. *Dual de $c_0(\mathbf{N},\mathbf{R})$*

Montrer que le dual topologique de l'espace des suites qui tendent vers 0, noté $c_0(\mathbf{N},\mathbf{R})$ s'identifie à $l^1(\mathbf{N},\mathbf{R})$ par une isométrie linéaire bijective.

Exercice 5. *Compacité et contrôle des normes L^p*

Soient $M > 0$ et $p > 1$. Montrer que l'ensemble
$$L_{M,p} = \Big\{ f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbf{R}) : \int_a^b |f(t)|\,dt + \int_a^b |f'(t)|^p\,dt \le M \Big\},$$
est relativement compact dans $(\mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$.