Licence 3 de Mathématiques — ENS Rennes
EVNCD — 2022-2023

TD 3 : Fonctions d'une variable réelle

Exercice 1. *Une minoration*

Montrer que pour tout $t > 0$:

$$\operatorname{Arctan}(t) > \frac{t}{1+t^2}.$$

Exercice 2. *Étude de la convergence d'une suite*

Montrer que la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = 1 \\ u_{n+1} & = \sqrt{2+u_n} \end{cases},$$

est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3. *Dérivation d'une fonction à valeurs vectorielles*

1. Soit $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, i.e. une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, telle que $f(0) = f'(0) = 0$. On pose :

$$T : \begin{cases} \mathbf{R} & \to l^1(\mathbf{N}^*, \mathbf{R}) \\ t & \mapsto \left(f\left(\frac{t}{n}\right)\right)_n. \end{cases}$$

Montrer que T est bien définie et dérivable sur $\mathbf{R}$.

2. Soit $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. On note $E = \mathcal{C}_b^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions continues et bornées qu'on munit de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$. On pose alors :

$$T : \begin{cases} \mathbf{R} & \to E \\ t & \mapsto T(t) = f(\cdot - t). \end{cases}$$

Montrer que T est bien définie, continue et dérivable en 0.

Exercice 4. *Un calcul de somme*

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable en 0 telle que $f(0) = 0$, et soit $L \geq 1$ un entier. Pour tout $n \geq 1$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{nL} f\Big(\frac{k}{n^2}\Big).$$

Montrer que la suite $(S_n)_n$ converge et calculer sa limite.

Exercice 5. *Une majoration de la norme L^1*

Soient $a < b$ deux réels et $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbf{R})$ deux fois dérivable sur (a,b) et telle que $f(a) = f(b) = 0$.

1. Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, il existe $c_x \in (a, b)$ tel que :

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-a)(x-b)f''(c_x).$$

2. En déduire que si f'' est bornée sur (a, b) :

$$\int_a^b |f(t)|\, dt \leq \frac{(b-a)^3}{12} \|f''\|_{\infty,(a,b)}.$$

Exercice 6. *Inégalité de Taylor-Lagrange et de Kolmogorov*

Soit E un espace vectoriel normé.

1. Soient $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{C}^n([a, b], E)$ une fonction $n+1$ fois dérivable sur $]a, b[$. Montrer l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(b-a)^k}{k!} \right\| \leq \|f^{(n+1)}\|_{\infty,]a,b[} \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, E)$. On suppose que :

$$\|f\|_\infty < +\infty \quad \text{et} \quad \|f''\|_\infty < +\infty.$$

   (a) Montrer que f' est bornée et même que pour tout $h > 0$:

$$\|f'\|_\infty \leq \frac{\|f\|_\infty}{h} + \frac{h\|f''\|_\infty}{2}.$$

   (b) En déduire l'inégalité de Kolmogorov :

$$\|f'\|_\infty \leq \sqrt{2\|f\|_\infty \|f''\|_\infty}.$$

Exercice 7. *Théorème de Darboux*

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une application dérivable.

1. Montrer que f' vérifie la conclusion du théorème des valeurs intermédiaires, c'est-à-dire que l'image d'un intervalle par f' est un intervalle.
2. Supposons de plus que f est convexe. Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

Exercice 8. *Nombre de racines d'un polynôme réel*

Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ admettant exactement k coefficients non nuls. Montrer que P a au plus $2k-1$ racines réelles distinctes. Cette majoration est-elle optimale ?

Exercice 9. *Lemme d'Hadamard*

Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ et $n \geq 1$. Établir l'équivalence des propriétés suivantes :

- $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$,
- $\exists g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}), \forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = x^n g(x)$.

Exercice 10. *Vers le principe des zéros isolés*

1. Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, et $a \in \mathbf{R}$ tel que $f(a) = 0$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $f^{(n)}(a) \neq 0$. Montrer qu'il existe $h > 0$ tel que :
$$\forall y \in]a-h, a+h[\setminus \{a\},\ f(y) \neq 0.$$
2. Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ et S un segment de $\mathbf{R}$. On suppose que pour tout zéro a de f, il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $f^{(n)}(a) \neq 0$. Montrer que f ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur S.

Remarque : Le corollaire direct de cet exercice est le principe des zéros isolés. Il assure que les zéros d'une fonction analytique non identiquement nulle sont isolés.

Exercice 11. *Autour du lemme de Borel*

1. Soit $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Montrer le lemme de Borel qui stipule qu'il existe une fonction $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ telle que :
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u^{(n)}(0) = a_n.$$
Indication : On pourra utiliser une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ valant 1 sur $[-1/2, 1/2]$ et nulle en dehors de $[-1, 1]$ dont on expliquera la construction et considérer une fonction u de la forme :
$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(\lambda_n x) a_n \frac{x^n}{n!},$$
où $(\lambda_n)_n \in (\mathbf{R}_*^+)^{\mathbf{N}}$ sera choisie convenablement.
2. Montrer que toute fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur un segment $[a, b]$ avec dérivées de tous ordres à droite en a et à gauche en b peut être prolongée en une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.
3. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ une fonction paire. En utilisant le lemme de Borel, montrer qu'il existe $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telle que :
$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = g(x^2).$$

Remarque : La fonction construite pour montrer le lemme de Borel n'est évidemment pas nécessairement analytique ou simplement développable en série entière autour de 0. Le résultat montre qu'on peut construire une fonction régulière ayant un développement de Taylor donné en 0, sachant que le rayon de convergence associé peut être nul si la fonction n'est pas developpable en série entière autour de 0.

Exercice 12. *Sinus cardinal et inégalité*

Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $x_1, \ldots, x_n \in [0, \pi]$. On pose $x = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$. Comparer :
$$\prod_{k=1}^{n} \frac{\sin(x_k)}{x_k} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^n.$$

Exercice 13. *Encadrement de l'intégrale d'une fonction convexe*

Soient $a < b$ deux réels et $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbf{R})$ une fonction convexe. Montrer que :
$$(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t)\, dt \leq (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$