Représentation des fonctions lipschitziennes

Référence : `http://dyna.maths.free.fr/docs/lecons/developpement_analyse_554.pdf`

Leçons : 201, 207, 208, 228, 234.

Théorème 1

Une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne si et seulement si il existe une fonction $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(y) - f(x) = \int_x^y g(t)\, dt.$$

Démonstration : Le sens réciproque est immédiat : montrons le sens direct. On note $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ et on considère la dérivée distributionnelle T de f :

$$T : \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{D}(\mathbb{R}) & \to \mathbb{R} \\ \phi & \mapsto \langle f', \phi \rangle := -\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x)\, dx \end{array} \right. .$$

- **Étape 1 : prolongement de T à L^1.** On commence par montrer que T est une forme linéaire continue sur $(\mathcal{D}(\mathbb{R}), \|.\|_{L^1})$. Pour cela montrons que pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle T, \phi \rangle = \lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h}\, dx.$$

Soit $M > 0$ tel que $|x| > M \Rightarrow \phi(x) = 0$. On a :

(a) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h} \underset{h \to 0}{\to} f(x)\phi'(x)$.

(b) Par l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall |h| \leq 1,\ \left| f(x) \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} \right| \leq |f(x)| \|\phi'\|_\infty \mathbf{1}_{[-M-1, M+1]}(x) \in L^1(\mathbb{R}).$$

On conclut par le théorème de convergence dominée. Par linéarité de l'intégrale et changement de variables, on déduit que :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \langle T, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} \phi(x)\, dx.$$

Ainsi si on note L tel que f soit L-lipschitzienne, on a :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ |\langle T, \phi \rangle| \leq L \|\phi\|_{L^1}.$$

Par le théorème de prolongement des applications uniformément continues sur une partie dense, T admet un unique prolongement toujours noté T, en une forme linéaire continue sur $(L^1(\mathbb{R}), \|.\|_{L^1(\mathbb{R})})$ i.e en un élément de $L^1(\mathbb{R})'$. De plus : $\|T\|_{L^1(\mathbb{R})'} \leq L$.

- **Etape 2 : on construit g grâce théorème de Riesz**
  On se donne $n \geq 1$. On utilise les injections suivantes qui sont continues :

$$L^2(-n,n) \hookrightarrow L^1(-n,n) \hookrightarrow L^1(\mathbb{R}).$$

  La première injection est continue par Cauchy-Schwarz et la seconde injection associe à $\phi \in L^1(-n,n)$ sont prolongement à $L^1(\mathbb{R})$ en prolongeant ϕ par 0 en dehors de $[-n,n]$: on note $\tilde{\phi}$ ce prolongement. On peut ainsi définir la forme linéaire continue suivante :

$$T_n : \left\{ \begin{array}{ll} L^2(-n,n) & \to \mathbb{R} \\ \phi & \mapsto \langle T, \tilde{\phi} \rangle \end{array} \right. .$$

  D'après le théorème de Riesz, il existe une unique $g_n \in L^2(-n,n)$ telle que :

$$\forall \phi \in L^2(-n,n),\, \langle T, \tilde{\phi} \rangle = \int_{\mathbb{R}} g_n(x)\phi(x)\, dx.$$

  De plus si $k \geq n$, l'unicité du théorème de Riesz assure que $g_k = g_n$ presque partout sur $[-n,n]$. On peut donc définir $g = \liminf_n g_n$ qui est mesurable. De plus pour tout n, $g_{|[-n,n]} = g_n$.

  Montrons que g appartient à $L^\infty(\mathbb{R})$. Par l'absurde, supposons que $A = \{x \in \mathbb{R}, |g(x)| > L\}$ n'est pas négligeable. Puisqu'on a l'union croissante suivante :

$$A = \bigcup_n A_n,$$

  où $A_n = A \cap [-n,n]$, il existe N tel que $\lambda(A_N) > 0$. Posons :

$$u = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(g) - \mathbf{1}_{\mathbb{R}_*^-}(g),$$

  si bien que $|g| = ug$. On considère alors $\phi = u\mathbf{1}_{A_N} \in L^2(-n,n)$. On a alors :

$$\langle T, \phi \rangle = \int_{-N}^{N} g(x)u(x)\mathbf{1}_{A_N}(x)\, dx = \int_{A_N} |g(x)|\, dx > L\lambda(A_N) = L\|\phi\|_{L^1}.$$

  Cela contredit $\|T\|_{L^1(\mathbb{R})'} \leq L$. On a donc montré que $T = f' = g$ est dans L^∞.

- **Étape 3 : conclusion** On définit :

$$G : \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \displaystyle\int_0^x g(t)\, dt \end{array} \right. ,$$

  qui est continue par convergence dominée. Le théorème de Fubini permet de montrer que $G' = g$ au sens des distributions. En effet : soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a :

$$\langle G', \phi \rangle = -\int_{\mathbb{R}} G(x)\phi'(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} \left(\int_x^0 g(t)\, dt \right) \phi'(x)\, dx - \int_0^\infty \left(\int_0^x g(t)\, dt \right) \phi'(x)\, dx.$$

  Soit M tel que $\phi(x) = 0$ si $|x| > M$. Pour presque-tout (t,x), on a :

$$|g(t)\phi'(x)|\mathbf{1}_{x \leq t \leq 0} \leq \|g\|_{L^\infty}\|\phi'\|_{L^\infty}\mathbf{1}_{-M \leq x \leq t \leq 0} \in L^1(\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-).$$

Cela permet d'appliquer le théorème de Fubini au premier terme. On peut également l'appliquer au second terme ce qui assure que :

$$\begin{aligned}\langle G', \phi\rangle &= -\int_{\mathbb{R}} G(x)\phi'(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{t} g(t)\phi'(x)\,dx\,dt - \int_{0}^{\infty}\int_{t}^{\infty} g(t)\phi'(x)\,dx\,dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(t)\phi(t)\,dt \\ &= \langle T, \phi\rangle.\end{aligned}$$

On a donc $G' = f'$. On déduit qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que : $f - G = C$ au sens des distributions. L'injection de $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ assure que $f(x) - G(x) = C$ pp-x. Comme les applications sont continues, on a le résultat pour tout $x \in \mathbb{R}$ ce qui achève la preuve.

□

Remarque 2.

- *On peut passer la preuve du fait que $G' = g$ pour gagner du temps.*
- *Le raisonnement de l'étape 2 permet de montrer que $L^1(\mathbb{R})' = L^\infty(\mathbb{R})$.*
- *Le théorème de différentiation de Lebesgue assure alors qu'une fonction lipschitzienne est dérivable presque-partout.*

Annexe

Démontrons les résultats qu'on a utilisés sur les distributions.

Théorème 3

Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ nulle au sens des distributions. Alors $f = 0$ presque-partout.

Démonstration : Soit $n > 0$. On dispose de $\chi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ valant 1 sur $[-n, n]$. Il existe également une approximation de l'unité $(\rho_n)_n$. Puisque $f\chi_n \in L^1(\mathbb{R})$, on a (voir un livre d'intégration par exemple le livre de M. Briane et G. Pagès : *Théorie de l'intégration*) :

$$f\chi_n * \rho_k \underset{k\infty, L^1}{\rightarrow} f\chi_n. \quad (*)$$

Or si on fixe $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f\chi_n * \rho_k(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\chi_n(t)\rho_k(x-t)\,dt.$$

Puisque $t \mapsto f(t)\chi_n(t)\rho_k(x-t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on déduit que pour tout k :

$$f\chi_n * \rho_k = 0.$$

La convergence $(*)$ assure alors que f est nulle presque partout sur $[-n, n]$. Cela étant vrai pour tout n, on a prouvé ce qu'on voulait. $\square$

Théorème 4

Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une distribution de dérivée distributionnelle nulle. Alors T est constante.

Démonstration : On dispose d'une application $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que :

$$\int_{\mathbb{R}} \chi(x)\,dx = 1.$$

Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on considère alors :

$$\psi := \phi - \left(\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\,dx\right)\chi.$$

ψ est une fonction test d'intégrale nulle, on en déduit que la fonction : $x \in \mathbb{R} \mapsto \xi(x) := \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \psi(t)\,dt$ est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a par hypothèse :

$$\begin{aligned}
\langle T', \xi\rangle_{\mathcal{D}'} &= -\langle T, \xi'\rangle_{\mathcal{D}'} \\
&= -\langle T, \psi\rangle_{\mathcal{D}'} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Cela assure que :

$$\langle T, \phi\rangle_{\mathcal{D}'} = \langle T, \chi\rangle_{\mathcal{D}'} \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\,dx,$$

ce qui montre bien que T est une distribution constante. $\square$