Table des matières

TIPE Automates cellulaires

Vladislav TEMPEZ

18 juin 2013

1 Automates cellulaires et modélisation

1.1 Définition d'un automate cellulaire

Un automate cellulaire est un système dynamique spatialement et temporellement discret. Il est caractérisé par un quadruplet (R, A, V, f) où :

R est le réseau de l'automate cellulaire, son espace d'évolution. On a souvent $R = \mathbb{Z}^d$ où d$\in \mathbb{N}^*$.

A est l'alphabet de l'automate, c'est à dire l'ensemble fini des états que peuvent prendre chacuns des points de son réseau.

V le voisinage de l'automate, c'est à dire une application $V : R \to R^n, r \mapsto V(r)$ où n est le nombre de voisins et $V(r)$ est le voisinage de la cellule r c'est à dire l'ensemble des cellules qui sont sont considérées comme adjacentes à r.

f est la fonction de transition, c'est à dire la règle d'évolution de l'état d'une cellule de l'étape t à t+1. Il s'agit d'une application $f : A^d \to A$ qui à l'ensemble des états du voisinage d'une cellule associe l'état suivant de cette cellule.

1.2 Automates étudiés

Ce TIPE va se restreindre à l'étude d'une classe d'automates cellulaires particulières. On aura ainsi

$R = \mathbb{Z}/_{3^N\mathbb{Z}}$ où $N \in \mathbb{N}^*$

$A = \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}$

V: $\mathbb{Z}/_{3^N\mathbb{Z}} \to (\mathbb{Z}/_{3^N\mathbb{Z}})^3, r \mapsto \{\overline{r-1}\} \bigcup \{\overline{r}\} \bigcup \{\overline{r+1}\}$

f: $(\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}})^3 \to \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}, (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) \mapsto \overline{a+b+c}$

1.3 Modélisation

1.3.1 Configuration d'un automate

Pour pouvoir démontrer des résultats sur cette classe d'automates nous allons montrer que chaque configuration peut être représentée par un polynôme et que la fonction de transition globable, qui a une configuration lui associe la configuration suivante correspond à une multiplication entre deux polynômes. Une configuration d'un automate cellulaire est la description de l'état de l'ensemble des points de son réseau.
Ainsi pour $N \in \mathbb{N}^*$ une configuration de l'automate est une famille $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}/_{3^N\mathbb{Z}}}$ d'éléments de $\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}$. On va donc représenter cette configuration par un polynôme de $\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}[X]$ quotienté par $X^{3^N}-1$.
Il y a bien bijection entre l'ensemble C des configurations de l'automate et $(\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}})_{3^N-1}[X]$.
Il y a aussi bijection entre $(\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}})_{3^N-1}[X]$ et $\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}[X]$ quotienté par $X^{3^N}-1$.
On peut donc bien représenter de manière unique chaque élément de C par un polynôme de $\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}[X]$ quotienté par $X^{3^N}-1$.

1.3.2 Modélisation de la fonction de transition

Soit F l'application qui a une configuration associe la configuration suivante ie $F(a_k)_{k\in\mathbb{Z}/_{3^N\mathbb{Z}}} = (f(a_k))_{k\in\mathbb{Z}/_{3^N\mathbb{Z}}}$
Montrons maintenant que $\forall\ c \in C$ le polynôme correspondant à $F(c)$ est $P_c\cdot(X^{-1}+1+X) = P_c\cdot(X^{3^N-1}+1+X)$ où P_c est le polynôme correspond à la configuration c.
On pose $P_c = \sum_{k=0}^{3^N-1} a_k\cdot X^k$. On a :
$P_c\cdot(X^{3^N-1}+1+X) = \sum_{k=0}^{3^N-1} a_k\cdot X^{k+3^N-1} + \sum_{k=0}^{3^N-1} a_k\cdot X^k + \sum_{k=0}^{3^N-1} a_k\cdot X^{k+1}$
$= \sum_{k=0}^{3^N-2} a_{k+1}\cdot X^k + a_0\cdot X^{3^N-1} + \sum_{k=0}^{3^N-1} a_k\cdot X^k + \sum_{k=1}^{3^N-1} a_{k-1}\cdot X^k + a_{3^N-1}\cdot X^{3^N}$
$= \sum_{k=1}^{3^N-2}(a_{k-1}+a_k+a_{k+1})\cdot X^k + a_0 + a_{3^N-1}\cdot X^{3^N-1} + a_{3^N-1}\cdot X^{3^N} + a_1 + a_{3^N-2}\cdot X^{3^N-1} + a_0\cdot X^{3^N-1}$
$= \sum_{k=1}^{3^N-2}(a_{k-1}+a_k+a_{k+1})\cdot X^k + (a_{3^N-1}+a_0+a_1) + (a_{3^N-2}+a_{3^N-1}+a_0)\cdot X^{3^N-1}$
Donc

$$P_c\cdot(X^{3^N-1}+1+X) = \sum_{k=0}^{3^N-1}(a_{k-1}+a_k+a_{k+1})\cdot X^k$$

Et on a bien la propriété voulue. Pour la suite on notera $(X^{-1}+1+X) = P_t$

1.4 Résultats expérimentaux : Nilpotence de l'automate

A l'aide de programmes informatiques (fournis en annexes) et de modèles "à la main" on se rend compte que quelque soit la configuration initiale et pour des faibles valeurs de N, l'automate est nilpotent, c'est à dire qu'à partir d'un certain nombre d'étapes l'état de chaque cellule est constant. Ici il s'agit d'une nilpotence en 0, c'est à dire que toutes les cellules valent constamment 0 à partir d'un certain nombre d'étapes. On observe aussi que les configurations initiales qui convergent le plus lentement sont celles qui font apparaître une alternance de deux états.
Exemple pour N=2 :

0	1	0	1	0	1	0	1	0

ou

2	0	2	0	2	0	2	0	2

De plus le nombre d'étapes ne semble, d'après les résultats expérimentaux, ne pas dépasser $\frac{3^N+1}{2}$.

1.5 Caractère nilpotent

On va montrer que toute configuration initiale mène à la configuration nulle en au plus $\frac{3^N+1}{2}$ étapes, c'est à dire que
$\forall c \in C, \exists k \in [\![0, \frac{3^N+1}{2}]\!], F^k(c) = (0)_{k\in\ Z/3^N\mathbb{Z}}$
On a donc sous forme polynomiale :
$\forall P\ \in \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}[X],\ P \cdot P_t^{\frac{3^N+1}{2}} = 0$
Il suffirait $P_t^{\frac{3^N+1}{2}} = 0$

1.5.1 Lemme 1

On va montrer que $\forall P \in\ Z/3\mathbb{Z}[X], P = \sum_{k=0}^{r} a_k \cdot X^k$, on a
$P^3 = \sum_{k=0}^{r} (a_k)^3 \cdot X^{3k}$ par récurrence sur le nombre de termes non nuls n de P.
Initialisation :
Pour $n = 0$ on a bien $0^3 = 0$, pour $n = 1$ on a bien $(a_k \cdot X^k)^3 = (a_k)^3 \cdot X^{3k}$
pour $n = 2$ on a $(a_k \cdot X^k + a_i \cdot X^i)^3 = \sum_{j=0}^{3} \binom{3}{j} (a_k \cdot X^k)^j (a_i \cdot X^i)^{3-j}$

Or $\forall p$ premier, $\forall j \in [\![1, p-1]\!], \binom{p}{j} = \frac{p}{j}\binom{p-1}{j-1}$ et $\binom{3p}{j} \in \mathbb{N}$ et $pgcd(p, j) = 1$ car p premier et $j < p$ donc j divise $\binom{p-1}{j-1}$ et ainsi $\binom{p}{j}$ multiple de p.
3 est premier donc $\forall j \in [\![1, 2]\!], \binom{3}{j}$ est multiple de 3 donc
$\sum\limits_{j=0}^{3}\binom{3}{j}(a_k \cdot X^k)^j(a_i \cdot X^i)^{3-j} = (a_k \cdot X^k)^3 + (a_i \cdot X^i)^3$ et ainsi :
$(a_k \cdot X^k + a_i \cdot X^i)^3 = (a_k)^3 \cdot X^{3k} + (a_i)^3 \cdot X^{3i}$
Hérédité : Si la propriété est vraie pour n=i alors pour n=i+1 on a
$P = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k \cdot X^k$ et en notant i l'indice d'un terme non nul on a
$P = \sum\limits_{k=0 \ et \ k\neq i}^{r} a_k \cdot X^k + a_i \cdot X^i = Q + R$ avec le nombre de terme non nul de Q qui vaut i et celui de R qui vaut 1. On a ainsi
$P^3 = (Q+R)^3 = \sum\limits_{j=0}^{3}\binom{3}{j} Q^j R^{3-j} = Q^3 + R^3$ car $\binom{3}{j}$ multiple de 3 et par hypothèse de récurrence on a bien $P^3 = \sum\limits_{k=0}^{r}(a_k)^3 \cdot X^{3k}$.
Conclusion : $\forall P \in \ Z/3\mathbb{Z}[X], P = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k \cdot X^k$, on a $P^3 = \sum\limits_{k=0}^{r}(a_k)^3 \cdot X^{3k}$

1.5.2 Lemme 2

On va montrer par récurrence et à l'aide du Lemme 1 que
$\forall n \in \mathbb{N}^*, P = (1 + X + X^2) \in \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}[X]$, on a : $P^{\frac{3^n-1}{2}} = \sum\limits_{k=0}^{3^n-1} X^k$
Initialisation : pour n=1 on a $\frac{3^n-1}{2} = 1$ et ainsi $P^1 = (1 + X + X^2)$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P^{\frac{3^{n-1}-1}{2}} = \sum\limits_{k=0}^{3^{n-1}-1} X^k$.
On a $P^{\frac{3^n-1}{2}} = P^{\frac{3^n-3}{2}} \cdot P = P^{3(\frac{3^{n-1}-1}{2})} \cdot P = (P^{\frac{3^{n-1}-1}{2}})^3 \cdot P = (\sum\limits_{k=0}^{3^{n-1}-1} X^k)^3 \cdot P$ par hypothèse de récurrence.
Et on a ainsi par le lemme 1 : $P^{\frac{3^n-1}{2}} = \sum\limits_{k=0}^{3^{n-1}-1} X^{3k} \cdot P$
$P^{\frac{3^n-1}{2}} = \sum\limits_{k=0}^{3^{n-1}-1} X^{3k} + \sum\limits_{k=0}^{3^{n-1}-1} X^{3k+1} + \sum\limits_{k=0}^{3^{n-1}-1} X^{3k+2}$
On pose $a_n = 1$ si $n \equiv 0[3]$ et $n < 3^n$ et 0 sinon,$b_n = 1$ si $n \equiv 1[3]$ et $n < 3^n$ et $c_n = 1$ si $n \equiv 2[3]$ et $n < 3^n$.

On a : $\sum_{k=0}^{3^{n-1}-1} X^{3k} = \sum_{k=0}^{3^n-1} a_k \cdot X^k$
$\sum_{k=0}^{3^{n-1}-1} X^{3k+1} = \sum_{k=0}^{3^n-1} b_k \cdot X^k$
$\sum_{k=0}^{3^{n-1}-1} X^{3k+2} = \sum_{k=0}^{3^n-1} c_k \cdot X^k$
Donc $P^{\frac{3^n-1}{2}} = \sum_{k=0}^{3^n-1} (a_k + b_k + c_k)X^k = \sum_{k=0}^{3^n-1} X^k$.
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P = (1 + X + X^2) \in \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}[X],\ P^{\frac{3^n-1}{2}} = \sum_{k=0}^{3^n-1} X^k$

1.5.3 Nilpotence

On se place maintenant dans $\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}[X]$ quotienté par $X^{3^N} - 1$.
On a alors $P_t^{\frac{3^n+1}{2}} = P_t^{\frac{3^n-1}{2}} \cdot P_t = X^{\frac{3^n+1}{2}} \cdot (1 + X + X^2)^{\frac{3^n-1}{2}} \cdot P_t$
$= X^{\frac{3^n+1}{2}} \cdot \sum_{k=0}^{3^n-1} X^k \cdot P_t = X^{\frac{3^n+1}{2}} \cdot (\sum_{k=0}^{3^n-1} X^{k-1} + \sum_{k=0}^{3^n-1} X^k + \sum_{k=0}^{3^n-1} X^{k+1})$
Donc $P_t^{\frac{3^n+1}{2}} = (\sum_{k=-1}^{3^n-1} X^k + \sum_{k=0}^{3^n-1} X^k + \sum_{k=1}^{3^n} X^k) = \sum_{k=1}^{3^n-2} (1+1+1)X^k + X^{3^n-1} + 1 + 1 + X^{3^n-1} + X^{3^n+1} + X^{3^n+1} = 0 + 1 + 1 + X^{3^n+1} + X^{3^n-1} + X^{3^n+1} + X^{-1}$
On a ainsi : $P_t^{\frac{3^n+1}{2}} = 0$ ce qui prouve le caractère nilpotent de l'automate pour une configuration initiale quelconque.

1.6 Jardins d'Eden

On a montré que pour une configuration initiale de taille 3^n quelconque, on obtenait la configuration nulle en $\frac{3^n+1}{2}$ étapes.
Nous allons maintenant montrer qu'il existe des configurations pour lesquelles ce nombre d'étape est atteint.
Ces configurations ne peuvent donc avoir d'état qui les précède, sinon cet état précédent atteindrait la configuration nulle en une étape de plus ce qui est absurde par maximalité du nombre d'étapes.
On nomme ces états qui n'ont pas d'état précédent des "Jardins d'Eden".
Comme observé lors des expérimentations, nous allons montrer que les configurations dont les coefficients alternent sont des Jardins d'Eden.
Soit $x \in\ Z/3\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}/_{3^N\mathbb{Z}}}$ tel que $a_k = x$ si k est pair et $a_k = x + 1$ sinon. On a alors :
Pour $P = \sum_{k=0}^{3^n-1} a_k X^k$ qui réprésente la configuration initiale alternée dont on

veut montrer qu'elle est un Jardin d'Eden :

$P \cdot (P_t)^{\frac{3^n-1}{2}} = X^{\frac{3^n-1}{2}} \cdot \sum_{k=0}^{3^n-1} X^k \cdot P$

$= \sum_{k=0}^{3^n-1} \sum_{i=0}^{3^n-1} a_k X^{k+i}$

$= \sum_{k=0}^{3^n-1} \left(\sum_{i=0}^{3^n-1-k} a_k X^{k+i} + \sum_{i=3^n-k}^{3^n-1} a_k X^{k+i} \right)$

$= \sum_{k=0}^{3^n-1} \left(\sum_{j=k}^{3^n-1} a_k X^j + \sum_{j=3^n}^{3^n-1+k} a_k X^j \right)$

$= \sum_{k=0}^{3^n-1} \left(\sum_{j=k}^{3^n-1} a_k X^j + X^{3^n} \sum_{j=0}^{k-1} a_k X^j \right)$

$= \sum_{k=0}^{3^n-1} \left(\sum_{j=0}^{3^n-1} a_k X^j \right)$ car $X^{3^n} = 1$ dans $\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}[X]$ quotienté par $X^{3^N} - 1$.

$= \sum_{k=0}^{3^n-1} a_k \left(\sum_{j=0}^{3^n-1} X^j \right)$

$= \sum_{j=0}^{3^n-1} X^j \left(\sum_{k=0}^{3^n-1} a_k \right)$

Or si $\sum_{k=0}^{3^n-1} a_k = 0$ alors on a $0 = \frac{3^n-1}{2} + \sum_{k=0}^{3^n-1} x$ donc $0 = \frac{3^n-1}{2} + x \cdot 3^n$ or $x \cdot 3^n \equiv 0[3]$ donc on a :

$\exists p \in \mathbb{Z}, \frac{3^n-1}{2} = 3p$ et ainsi $3^n = 3(2p) + 1$ donc $3^n \equiv 1[3]$ ce qui est absurde donc $\sum_{k=0}^{3^n-1} a_k \neq 0$ et ainsi $\sum_{j=0}^{3^n-1} X^j \left(\sum_{k=0}^{3^n-1} a_k \right)$ n'est pas la configuration nulle donc il faut bien $\frac{3^n+1}{2}$ étapes à la configuration initiales pour atteindre la configuration nulle.

Les configurations ayant pour coefficients $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}/_{3^N\mathbb{Z}}}$ sont donc des Jardin d'Eden.