TD 2 : Lois stationnaires et convergence

Exercice 1

On considère d boules numérotées de 1 à d (avec $d > 1$), réparties dans deux urnes A et B. On tire un nombre i au hasard entre 1 et d puis on tire au hasard l'urne dans laquelle on replace la boule i. Tous les tirages sont supposés indépendants et de loi uniforme. On note X_n le nombre de boules dans l'urne A après n tirages.

1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans l'espace fini $E = \{0, ..., d\}$ dont on déterminera la matrice de transition P.

2. Montrer que la chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est irréductible et récurrente. Est-elle apériodique ?

3. Déterminer deux constantes réelles a et b telles que pour tout $x \in E$,

$$\sum_{y\in E} yP(x, y) = ax + b \ .$$

En déduire les valeurs de $E_x(X_1)$, $E_x(X_2)$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, celle de $E_x(X_n)$. En déduire $\lim_{n\to\infty} E_x(X_n)$.

4. On note ν la loi binomiale de paramètres d et $1/2$. On suppose que $\mathcal{L}(X_0) = \nu$. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}(X_n)$.

5. On note T_d le temps de premier retour en d. Que valent $E_d(T_d)$ et $\lim_{n\to\infty} P^n(x, y)$?

Exercice 2 (*marche aléatoire sur* $\mathbb{Z}$)

Soit $(\xi_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que $P(\xi_1 = 1) = 1 - P(\xi_1 = -1) = p \in (0, 1)$.

Soit X_0 une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$, indépendante de la suite $(\xi_n)_{n\geq 1}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$X_n = X_0 + \sum_{i=1}^{n} \xi_i \ .$$

1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov dont on précisera la matrice de transitions.

2. Montrer que, dans le cas où $p \neq 1/2$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est transitoire.

3. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente si l'on suppose que $p = 1/2$.

4. On suppose toujours que $p = 1/2$. Expliquer pourquoi il existe, à constante multiplicative près, une unique mesure invariante. La calculer et en déduire que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente nulle.

5. Montrer que, toujours dans la situation où $p = 1/2$, on a $\limsup_{n\to+\infty} X_n = +\infty$.

Exercice 3 (*marche aléatoire réfléchie en* 0)

On définit la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la même façon qu'à l'exercice précédent (on reprend les notations de cet exercice). On définit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} Z_0 = \max\{X_0, 0\} \\ Z_{n+1} = Z_n + \xi_{n+1}\mathbf{1}_{\{Z_n>0\}} + \mathbf{1}_{\{Z_n=0\}} \ , \quad n \geq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov irréductible à valeurs dans $\mathbb{N}$. Donner sa matrice de transitions.

2. Vérifier que, pour tout n on a, presque sûrement, $Z_n \geq X_n$. En déduire que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est transitoire dans le cas où $p > 1/2$.

3. On suppose maintenant que $p < 1/2$. On considère la mesure définie par

$$\begin{cases} \mu(0) = \frac{1-2p}{2(1-p)} \\ \mu(n) = \frac{(1-2p)p^{k-1}}{2(1-p)^{k+1}}\ , \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Vérifier que cette mesure est invariante. En déduire que Z est récurrente positive.

4. On suppose $p = 1/2$. Quelles sont les mesures invariantes pour $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans ce cas ?