TD d'optimisation numéro 1
optimisation sans contrainte

Jocelyne Erhel

ENSAI, Janvier 2020

1 Exercice 1: point de minimum et points selles

On considère la fonction suivante définie dans $\mathbf{R}^2$:

$$f(x, y) = 3xy^2 - y^3 + x^2 + y^2 - 1.$$

1. Vérifier que la fonction est au moins de classe C^2 dans $\mathbf{R}^2$.

2. Calculer le gradient de f en tout point (x, y) de $\mathbf{R}^2$ et montrer qu'il existe trois points critiques.

3. Calculer la matrice hessienne $H_f(x, y)$ en tout point (x, y) de $\mathbf{R}^2$ puis aux points critiques.

4. Montrer qu'un des points critiques est un point de minimum local et que les deux autres points critiques sont des points selles.

2 Exercice 2: fonction de Rosenbrock

On considère la fonction suivante définie dans $\mathbf{R}^2$, dite fonction de Rosenbrock:

$$f(x_1, x_2) = 100 * (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2.$$

1. Calculer le gradient de f en tout point $x = (x_1, x_2)$ et montrer qu'il existe un unique point critique.

2. Calculer la matrice hessienne $H_f(x_1, x_2)$ en tout point (x_1, x_2) puis au point critique.

3. Vérifier que la matrice hessienne au point critique est symétrique définie positive. Que peut-on en conclure ?

4. Montrer que le point critique est un point de minimum global.

3 Exercice 3: moyenne et variance empiriques

Soit $n \in \mathbf{N}$ avec $n \geq 2$ et $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$. On suppose que les a_i ne sont pas tous égaux.

On considère le problème de maximisation $\max_{(m,\sigma)\in\mathbf{R}\times]0,+\infty[} g(m,\sigma)$ où

$$g(m,\sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{(a_i - m)^2}{2\sigma^2}).$$

1. Montrer que le problème est équivalent à minimiser la fonction f définie par

$$f(m,\sigma) = -\log(g(m,\sigma)).$$

2. Montrer qu'il existe un unique point critique et le déterminer.

3. Montrer que ce point critique est un point de minimum local.

4 Exercice 4: nuage de points en 3D

Soit m un entier naturel non nul. Dans l'espace $\mathbf{R}^3$, on considère un nuage de m points $A_i, i = 1, \ldots, m$ de coordonnées $(a_i, b_i, c_i)^T, i = 1, \ldots, m$. On cherche un point M de coordonnées $(x, y, z)^T$ "proche" des points A_i.

Soit f la fonction de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$f(x,y,z) = \sum_{i=1}^{m} [(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 + (z - c_i)^2].$$

On admet que f est de classe $C^2(\mathbf{R}^3)$.

1. Interpréter géométriquement la fonction f.

2. Calculer le gradient $\nabla f(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ et la matrice hessienne $H_f(x,y,z) \in \mathbf{R}^{3\times3}$ en tout point $(x,y,z)^T$ de $\mathbf{R}^3$.

3. Montrer que le problème $\min_{(x,y,z)^T\in\mathbf{R}^3} f(x,y,z)$ a une unique solution.

4. Calculer cette solution.

5. Interpréter géométriquement cette solution.