Nom :
Prénom: Séries temporelles : Examen *17/12/2019*

Exercice 1 : [4 points] QCM. *Il peut y avoir plusieurs réponses possibles à chaque question. Une question entièrement juste rapporte 0.5 point, sinon elle rapporte -0.25 point. L'exercice global est minoré par 0.*

1) L'inverse de l'opérateur $I - \frac{1}{5}B$ est

☐ $\sum_{i=0}^{+\infty}(-5)^i B^i$ ☐ $\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{5^i} B^i$ ☐ $\sum_{i=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^i B^i$ ☐ $\sum_{i=0}^{+\infty} 5^i B^i$

2) L'inverse de l'opérateur $I + 3B$ est

☐ $\sum_{i=1}^{+\infty} 3^i B^{-i}$ ☐ $\sum_{i=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^i B^i$ ☐ $-\sum_{i=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^i B^{-i}$ ☐ $\sum_{i=0}^{+\infty}(-3)^i B^i$

3) Soit $(\varepsilon_t)_t$ un bruit blanc. Parmi les équations suivantes, lesquelles définissent un processus $(X_t)_t$ stationnaire :

☐ $\forall t \in \mathbb{Z} \quad X_t = 2t + \varepsilon_t - \frac{1}{3}\varepsilon_{t-1}$
☐ $\forall t \in \mathbb{Z} \quad X_t - X_{t-1} = \varepsilon_t - \frac{1}{3}\varepsilon_{t-1}$
☐ $\forall t \in \mathbb{Z} \quad X_t = \varepsilon_t - \frac{1}{3}\varepsilon_{t-1}$
☐ $\forall t \in \mathbb{Z} \quad X_t - \frac{1}{6}X_{t-1} = \varepsilon_t - \frac{1}{3}\varepsilon_{t-1}$

4) Pour que deux processus X et Y soient mutuellement stationnaires, il faut que

☐ X soit stationnaire
☐ Y soit stationnaire
☐ $X + Y$ soit stationnaire
☐ la covariance croisée de X et Y soit invariante par translation dans le temps
☐ la covariance associée de X et Y soit invariante par translation dans le temps

5) Soit X une série qui présente une tendance polynomiale déterministe m ainsi qu'une saisonnalité s de période donnée. Si l'on souhaite estimer la tendance m, on applique à X un filtre qui

☐ absorbe m et s
☐ absorbe s et laisse invariante m
☐ absorbe m et laisse invariante s
☐ laisse invariantes m et s.

6) Dans la méthode de Box-Jenkins, une fois que l'on a déterminé des valeurs pour p, d et q, on teste la blancheur des résidus. Pour cela, on peut

☐ calculer l'AIC
☐ regarder leur ACF et PACF empirique
☐ utiliser un test de Ljung-Box
☐ appliquer un filtre moyenne mobile

7) Le lissage exponentiel simple consiste à ajuster localement une constante à la série temporelle.

☐ Vrai ☐ Faux

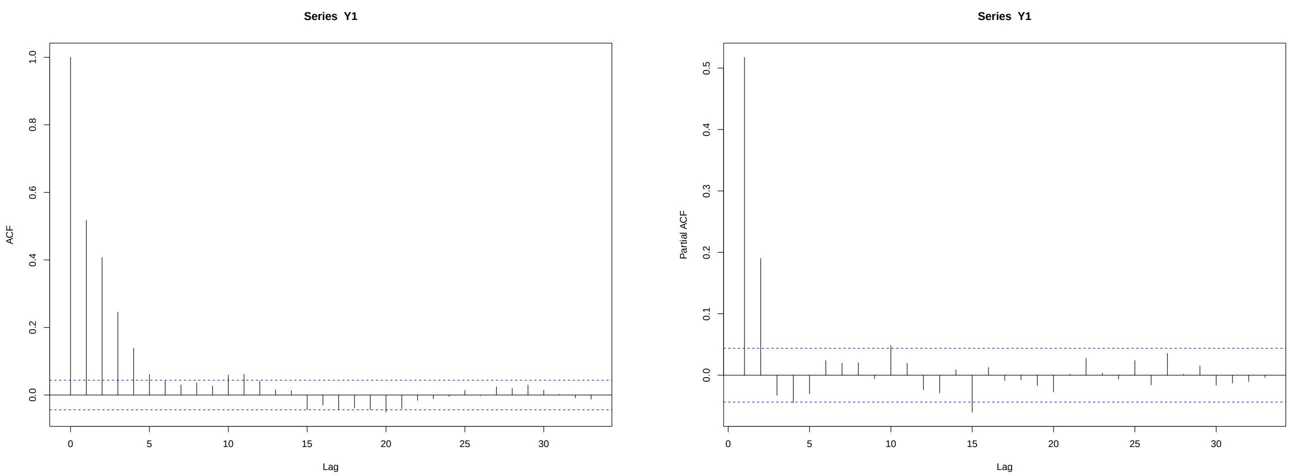
8) Le lissage de Holt-Winters permet de prendre en compte une composante saisonnière.

☐ Vrai ☐ Faux

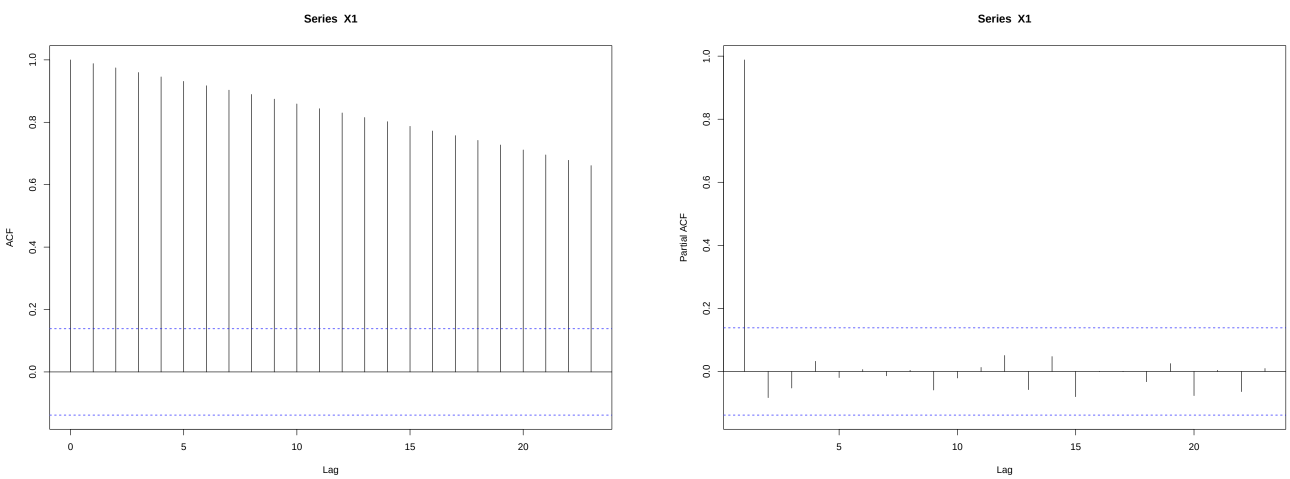
Exercice 2 : [6 points] On a tracé les fonctions d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle empiriques pour cinq séries temporelles. Pour chaque série :

- choisir (en justifiant) une modélisation compatible avec les graphiques parmi celles proposées
- écrire le modèle correspondant sous forme explicite.

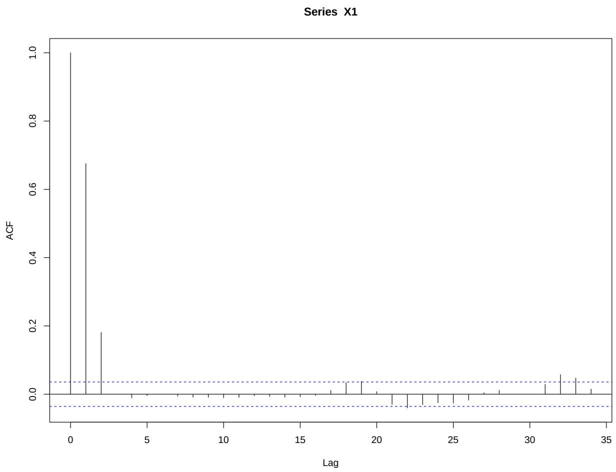
1) AR(1), AR(2), MA(1), MA(2)

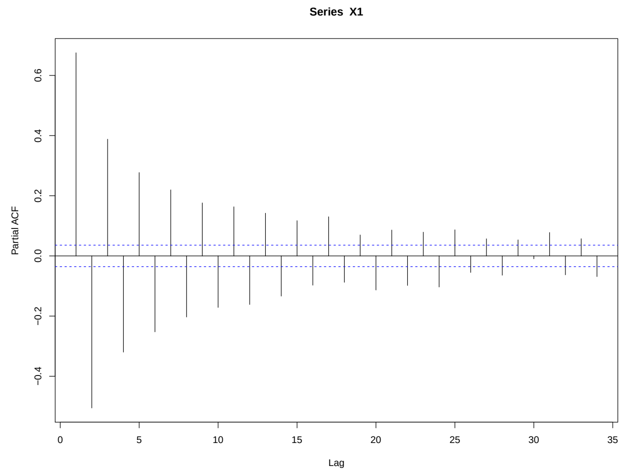


2) AR(1), ARIMA$(1,1,0)$, ARIMA$(1,0,1)$, ARIMA$(1,0,0)$

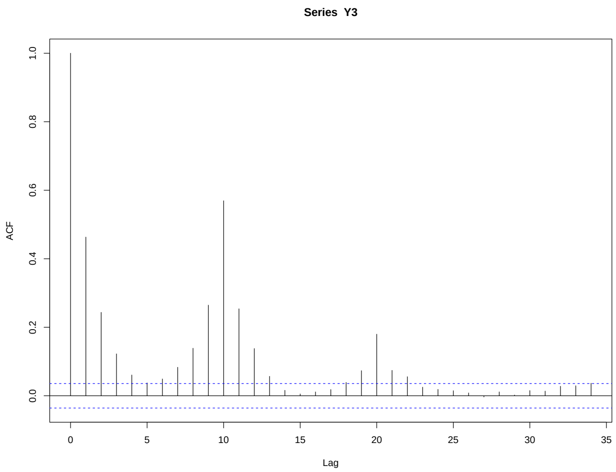


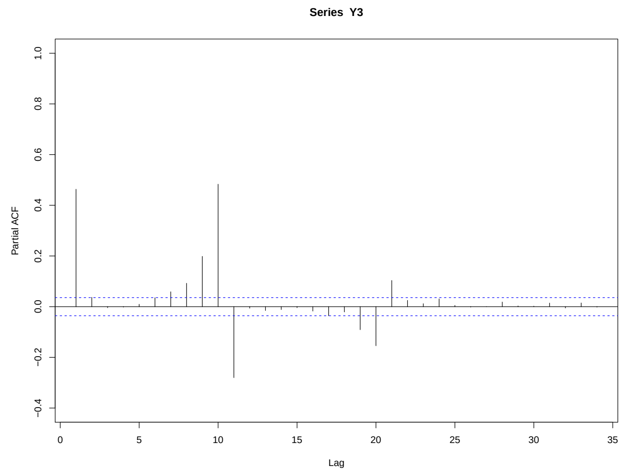
3) AR(2), AR(3), MA(2), MA(3)



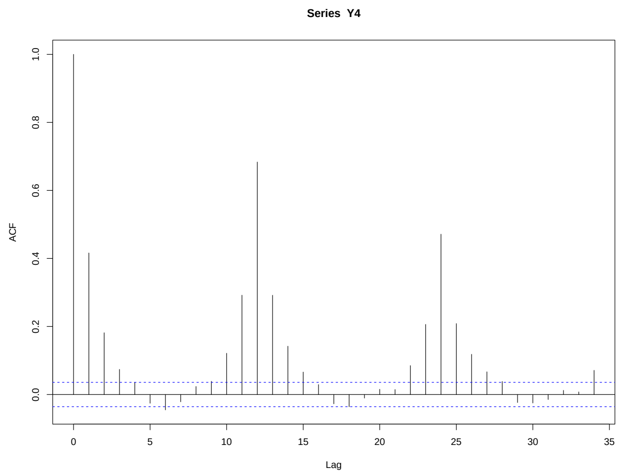


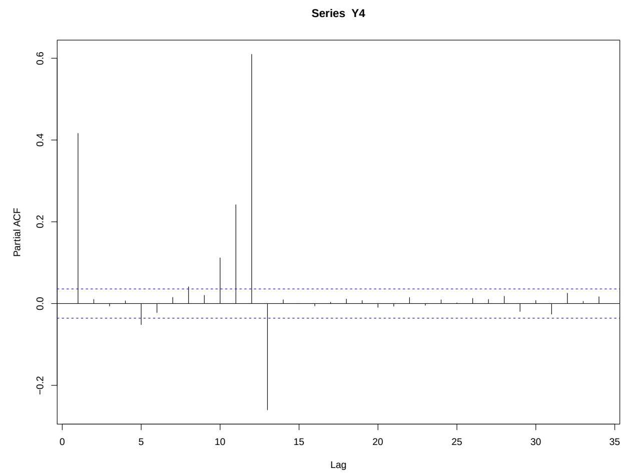
4) $\mathrm{SARIMA}(2,0,1)\times(2,0,2)_{10}$, $\mathrm{SARIMA}(1,0,0)\times(2,0,2)_{10}$, $\mathrm{SARIMA}(1,0,0)\times(1,0,3)_{10}$





5) SARIMA$(1,0,0) \times (2,0,0)_{12}$, SARIMA$(0,0,0) \times (1,0,0)_{12}$, SARIMA$(1,0,0) \times (1,0,0)_{12}$





Exercice 3 : [10 points] On considère l'opérateur $\Phi(B) = I - \frac{1}{6}B - \frac{1}{6}B^2$.

1) Montrer que $\Phi(B)$ est inversible et calculer son inverse.

2) Soit $(\varepsilon_t)_t$ un bruit blanc de variance $\sigma^2 > 0$. On pose, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $\Phi(B)X_t = \varepsilon_t$.

   (a) De quel type est le processus $(X_t)_t$? Justifier sa stationnarité et donner ses ordres p et q.

   (b) Montrer que $(X_t)_t$ est causal et l'écrire sous sa forme MA(∞).

   (c) En déduire son espérance m et la forme générale de sa fonction d'autocovariance γ sans chercher à l'expliciter.

   (d) On suppose de plus que $(\varepsilon_t)_t$ est gaussien. Quelle est alors la loi de (X_t, X_{t+3}) ? On l'exprimera en fonction de γ.

3) On pose maintenant, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $\Phi(B)Y_t = \varepsilon_t - \frac{1}{3}\,\varepsilon_{t-1}$

   (a) De quel type est le processus $(Y_t)_t$? Justifier sa stationnarité et donner ses ordres p et q.

   (b) Montrer que cette représentation est minimale.

   (c) $(\varepsilon_t)_t$ est-il son processus des innovations ?

   (d) Montrer que $(Y_t)_t$ s'écrit sous la forme AR(∞) suivante :

$$\varepsilon_t = Y_t + \frac{1}{6}Y_{t-1} - \sum_{i=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i Y_{t-i}.$$

   (e) En déduire une expression de la projection orthogonale de Y_t sur le sous-espace vectoriel fermé de $\mathbb{L}^2$ engendré par $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \ldots$.