Exercice 1 : Soit $(S_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ une suite périodique de période 3 et de moyenne nulle sur une période et soit $m_t = a + bt$ une tendance affine avec a et b des réels non nuls. Soit $(X_t)_t$ le processus défini pour tout $t \in \mathbb{Z}$ par $X_t = m_t + S_t + \varepsilon_t$ où $(\varepsilon_t)_t$ est un bruit blanc. On considère le filtre linéaire $M_1(B)$ défini par

$$M_1(B) = \frac{1}{3}\left(B + I + B^{-1}\right).$$

1) Quel est le nom de ce filtre et quel est son ordre ?
2) Montrer que $M_1(B)$ absorbe $(S_t)_t$ et laisse invariante $(m_t)_t$.
3) Montrer que le filtre $(I - B^3)$ absorbe, lui aussi, $(S_t)_t$.
4) Calculer $(I - B^3)X_t$ et identifier de quel type de processus il s'agit, puis déterminer sa fonction d'autocovariance γ et tracer l'autocorrélogramme associé.
5) Parmi les filtres proposés, lequel pourra-t-on appliquer au processus $(X_t)_t$ si l'on souhaite estimer sa tendance affine $(m_t)_t$?

Exercice 2 : Soit $(\varepsilon_t)_t$ un bruit blanc de variance $\sigma^2 > 0$. Soit $(X_t)_t$ le processus défini, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, par

$$X_t = \varepsilon_t - \frac{3}{4}\varepsilon_{t-1} + \frac{1}{8}\varepsilon_{t-2}.$$

1) Déterminer de quel type de processus il s'agit et quel est son ordre.
2) Justifier pourquoi l'opérateur $\Theta(B) = I - \frac{3}{4}B + \frac{1}{8}B^2$ est inversible.
3) Déterminer les réels a et b dans la décomposition en éléments simples suivante :

$$\frac{1}{(1-\frac{1}{4}\lambda)(1-\frac{1}{2}\lambda)} = \frac{a}{1-\frac{1}{4}\lambda} + \frac{b}{1-\frac{1}{2}\lambda}.$$

4) En déduire l'expression de $\Theta(B)^{-1}$ l'inverse de $\Theta(B)$.
5) En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon_t = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{2^i} - \frac{1}{4^i}\right)X_{t-i}$.
6) Montrer que $(\varepsilon_t)_t$ est le processus des innovations de $(X_t)_t$.
7) En utilisant les résultats des deux questions précédentes, déterminer l'expression de la projection orthogonale de X_t sur $\overline{\mathrm{Vect}}\,(X_{t-1}, X_{t-2}, \cdots)$.

Exercice 3 : Soient Y et Z deux variables aléatoires réelles qui vérifient $\mathbb{E}[Y] = m$, $\mathbb{E}[Z] = \mu$, $\mathrm{Var}(Y) = \tau^2 > 0$, $\mathrm{Var}(Z) = \eta^2 > 0$ et $\mathrm{Cov}(Y, Z) = \delta$. On considère le processus $(X_t)_t$ défini pour tout $t \in \mathbb{Z}$ par

$$X_t = \begin{cases} Y + \varepsilon_t & \text{si t est pair} \\ Z + \varepsilon_t & \text{si t est impair} \end{cases}$$

où $(\varepsilon_t)_t$ est un bruit blanc de variance σ^2 indépendant de Y et de Z.

1) Calculer l'espérance et la variance de X_t.

2) Pour tout $h > 0$, calculer la covariance de X_t et X_{t+h}. *Indication : Il faudra distinguer selon la parité de t et de h. On rappelle que si deux entiers sont de même parité alors leur somme est paire. Au contraire, la somme d'un entier pair et d'un entier impair est impaire.*

3) Déterminer les conditions sur les paramètres m, μ, τ^2 et η^2 pour que $(X_t)_t$ soit stationnaire.

4) Lorsqu'il est stationnaire, donner sa fonction d'autocovariance γ et en déduire sa fonction d'autocorrélation ρ.