*Durée : 3h, tous documents autorisés, calculatrices autorisées.*

*Le sujet comporte quatre pages avec x exercices indépendants. La qualité de la rédaction et de la présentation sera prise en compte dans la notation.*

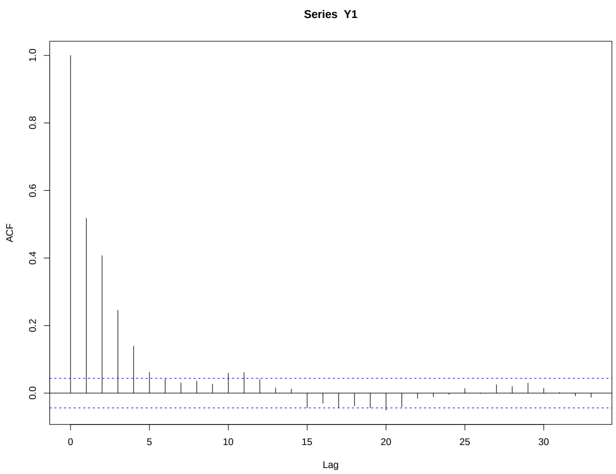
**Exercice 1 :** On considère l'opérateur $\Phi(B) = I - \frac{3}{4}B + \frac{1}{8}B^2$.

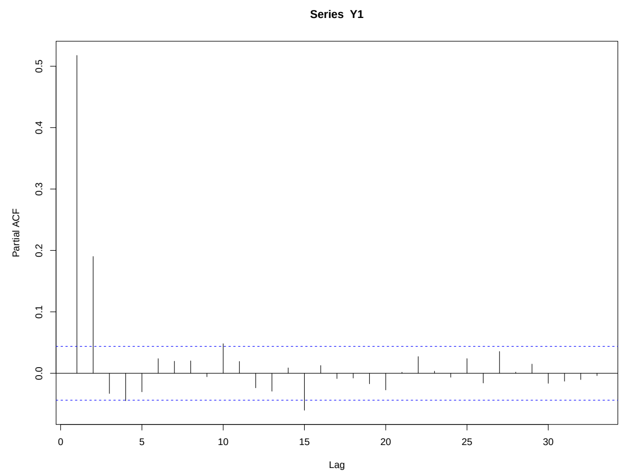
1) Justifier que $\Phi(B)$ est inversible.
2) On veut écrire $\Phi(B)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \psi_k B^k$.
   (a) En utilisant la relation $\Phi(B)\Phi(B)^{-1} = I$, montrer par identification que les coefficients $(\psi_k)_{k\geq 0}$ vérifient le système suivant :
   $$\begin{cases} \psi_0 = 1, \psi_1 = \frac{3}{4}, \\ \psi_k - \frac{3}{4}\psi_{k-1} + \frac{1}{8}\psi_{k-2} = 0, \quad k \geq 2. \end{cases}$$
   (b) Résoudre le système pour montrer que, pour tout $k \geq 0$, $\psi_k = \dfrac{1}{2^{k-1}} - \dfrac{1}{4^k}$.
   On admettra pour la suite que $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \psi_k^2 = \frac{64}{35}$.
3) Soit $(\varepsilon_t)_t$ un bruit blanc de variance $\sigma^2 > 0$. On pose, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $\Phi(B)X_t = \varepsilon_t$.
   (a) De quel type est le processus $(X_t)_t$ ainsi défini ? Justifier sa stationnarité et déterminer ses ordres $p$ et $q$.
   (b) Montrer que $(X_t)_t$ est causal et l'écrire sous sa forme MA($\infty$).
   (c) En déduire son espérance $m$ et la forme générale de sa fonction d'autocovariance $\gamma$ en fonction des $\psi_k$ et de $\sigma^2$. Calculer sa variance $\gamma(0)$ en fonction de $\sigma^2$.
   (d) On suppose de plus que $(\varepsilon_t)_t$ est gaussien. Quelle est alors la loi de $(X_t, X_{t+1}, X_{t+2})$ ? On l'exprimera en fonction de $\gamma$.
4) On pose maintenant, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $\Phi(B)Y_t = \varepsilon_t + \frac{1}{2}\,\varepsilon_{t-1}$
   (a) De quel type est le processus $(Y_t)_t$ ? Justifier sa stationnarité et déterminer ses ordres $p$ et $q$.
   (b) Cette représentation est-elle minimale ?
   (c) Ecrire $(Y_t)_t$ sous sa forme AR($\infty$).
   (d) En déduire une expression de la projection orthogonale de $Y_t$ sur le sous-espace vectoriel fermé de $\mathbb{L}^2$ engendré par $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \ldots$.

**Exercice 2 :** On a tracé les fonctions d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle empiriques de quatre séries chronologiques. Pour chaque série :

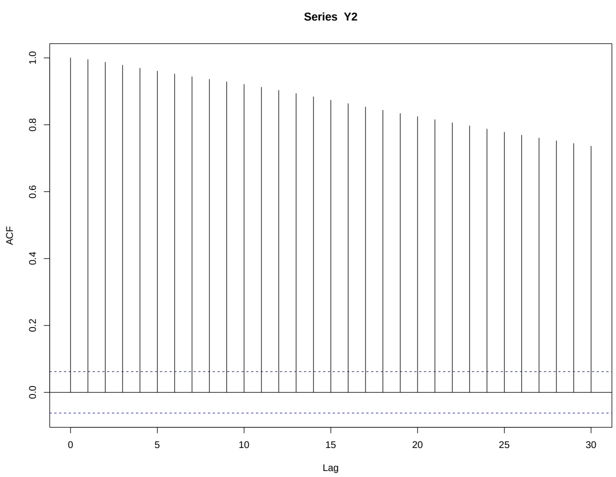
- choisir (en justifiant) une modélisation compatible avec les graphiques parmi celles proposées
- écrire le modèle correspondant sous forme explicite.

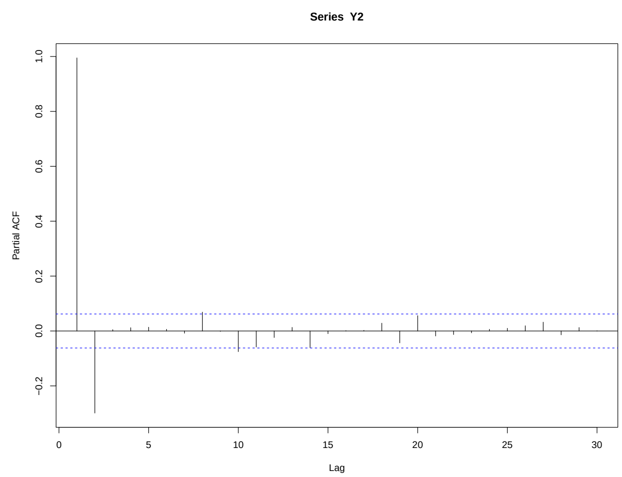
1) AR(1), AR(2), MA(1), MA(2)



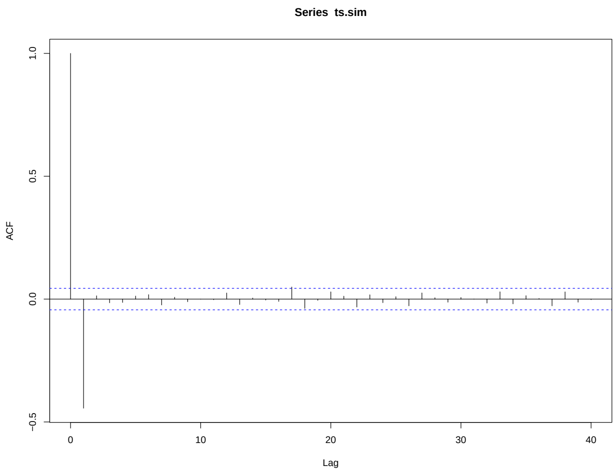



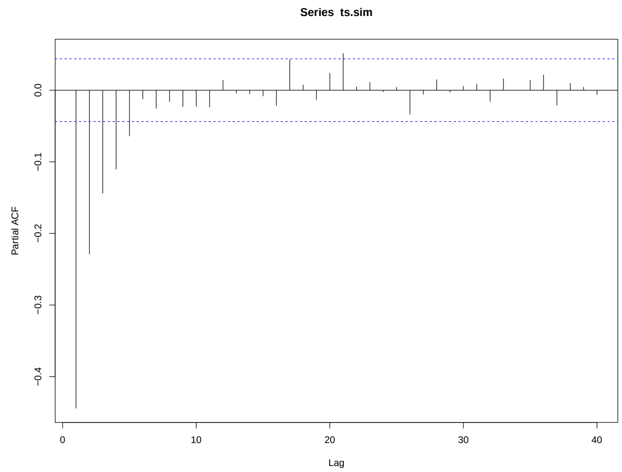

2) ARIMA$(2,0,0)$, ARIMA$(0,0,1)$, ARIMA$(1,1,0)$, ARIMA$(0,0,2)$



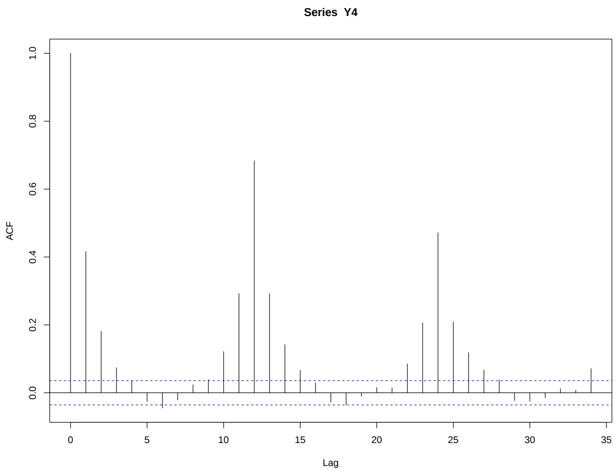



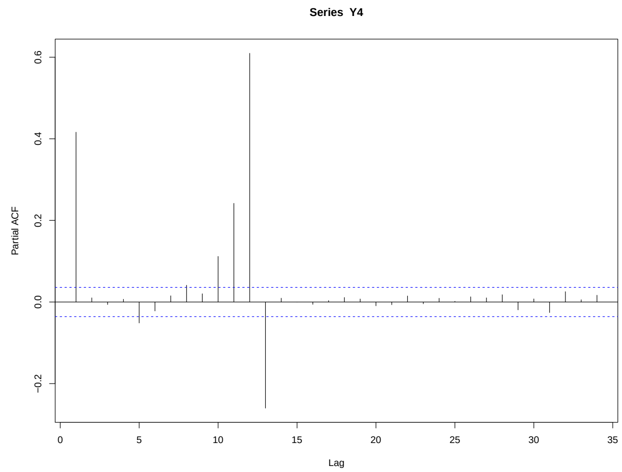
3) AR(1), AR(2), MA(1), MA(2)




4) $\text{SARIMA}(1,0,0)\times(2,0,0)_{12}$, $\text{SARIMA}(0,0,0)\times(1,0,0)_{12}$, $\text{SARIMA}(1,0,0)\times(1,0,0)_{12}$



**Exercice 3 :** Soit $\varepsilon_0$ une variable aléatoire centrée de variance $\sigma^2 > 0$ et soit $(U_t)_t$ le processus défini, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, par
$$U_t = (-1)^t \, \varepsilon_0.$$
Etudier la stationnarité de $(U_t)_t$ et calculer, le cas échéant, ses fonctions d'autocovariance $\gamma$ et d'autocorrélation $\rho$.

**Exercice 4 :** Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc de variance $\sigma^2 > 0$ et $\varphi$ un réel non nul tel que $|\varphi| \neq 1$. On considère le processus AR(1) défini par
$$(I - \varphi B)\, X_t = \varepsilon_t.$$

1) Quelle condition doit vérifier $\varphi$ pour que $(\varepsilon_t)_t$ soit le processus des innovations de $(X_t)_t$ ?

2) Dans la suite, on suppose que $|\varphi| > 1$. On rappelle que l'on peut réécrire
$$(I - \varphi B) = (-\varphi B)\left(I - \frac{1}{\varphi} B^{-1}\right)$$

   (a) Calculer l'inverse de $(I - \varphi B)$ et en déduire que, pour tout $t \in \mathbb{Z}$,
   $$X_t = -\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\varphi^j}\, \varepsilon_{t+j}.$$

   (b) En utilisant cette expression de $X_t$, montrer que sa fonction d'autocovariance $\gamma_X$ est donnée, pour tout $h \in \mathbb{Z}$, par
   $$\gamma_X(h) = \frac{\sigma^2 \varphi^{-|h|}}{\varphi^2 - 1},$$
   puis en déduire sa fonction d'autocorrélation $\rho_X$.

   (c) On considère l'opérateur $\Psi(B) = \left(I - \varphi^{-1} B\right)(I - \varphi B)^{-1}$ et on note $\eta_t = \Psi(B)\varepsilon_t$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, on a
   $$\eta_t = \frac{1}{\varphi^2}\left(\varepsilon_t + (1 - \varphi^2) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\varphi^k}\, \varepsilon_{t+k}\right).$$

   (d) Montrer que $(\eta_t)_t$ est un bruit blanc de variance $\sigma^2/\varphi^2$.

   (e) En déduire la forme causale de $(X_t)_t$ et identifier son processus des innovations.

**Exercice 5 :** Soient $(X_t)_t$ et $(Y_t)_t$ deux processus stationnaires de fonctions d'autocovariance respectives $\gamma_X$ et $\gamma_Y$ et mutuellement décorrélés c'est-à-dire que pour tous $s, t \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{Cov}(X_s, Y_t) = 0$.

1) Montrer que le processus $(X_t + Y_t)_t$ est stationnaire et exprimer sa fonction d'autocovariance $\gamma_{X+Y}$ en fonction de $\gamma_X$ et $\gamma_Y$.

2) Donner un contre-exemple pour montrer que, si l'on ne suppose plus que $(X_t)_t$ et $(Y_t)_t$ sont mutuellement décorrélés, $(X_t + Y_t)_t$ n'est pas nécessairement stationnaire.