CONSTRUCTIONS SUR LES AUTOMATES

L'UNION

A FINIR $\Rightarrow$ produit étoile.

Cf. Sakarovitch p67-70.

Soient $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ deux automates sur le m̂ alphabet Σ, d'états disjoints. $\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, I_1, F_1)$
$\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, I_2, F_2)$ où $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$ (quitte à renommer les états)

$$\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 = (Q_1 \cup Q_2, \Sigma, \delta_1 \cup \delta_2, I_1 \cup I_2, F_1 \cup F_2)$$

Rq graphiquement il ne s'agit que de juxtaposer les 2 graphes.

Pté $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_1) \cup \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$

"L'automate union reconnait l'union des langages reconnus par les deux automates initiaux"

↳ **Cor** $\boxed{\text{L'union de deux langages reconnaissables est reconnaissable.}}$

LE PRODUIT (CARTÉSIEN ou DIRECT)

Soient $\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, I_1, F_1)$ et $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, I_2, F_2)$ deux automates sur Σ.

$$\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta, I_1 \times I_2, F_1 \times F_2)$$

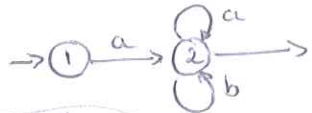
où $\delta = \{((p_1, p_2), a, (q_1, q_2)) \mid (p_1, a, q_1) \in \delta_1 \text{ et } (p_2, a, q_2)\}$

Pté $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_1) \cap \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$

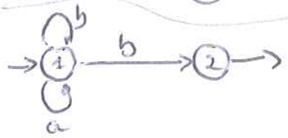
⚠ L'automate produit ne reconnait pas le produit des langages mais leur intersec° !

↳ **Cor** $\boxed{\text{L'intersec° de deux langages reconnaissables est reconnaissable}}$

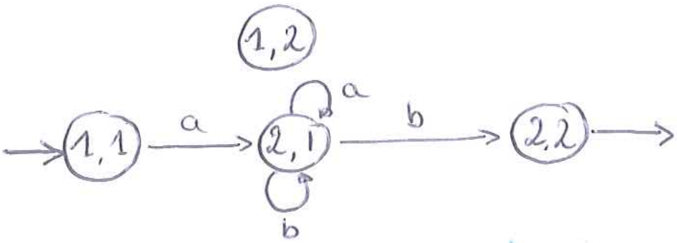
ex sur $\Sigma = \{a,b\}$

$\mathcal{A}_1 =$ 

qui reconnait aA^* (les mots commençant par un a)

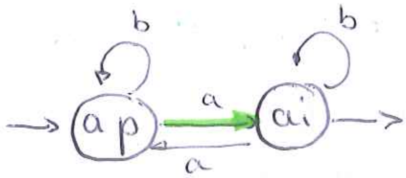
$\mathcal{A}_2 =$ 

qui reconnait A^*b ie les mots finissant par b

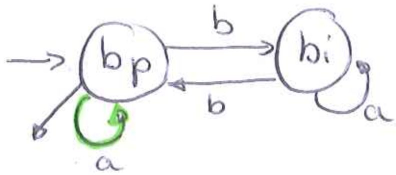
$\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 =$ 

reconnait aA^*b = les mots qui commencent par a et finissent par b.

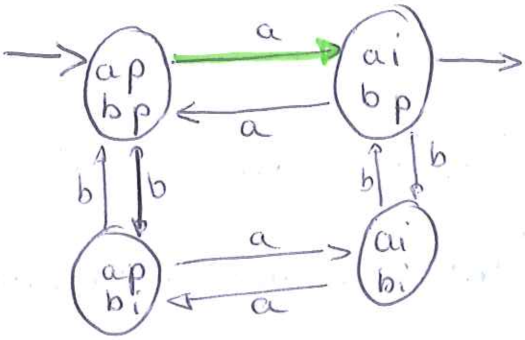
ex sur $\Sigma = \{a,b\}$

$\mathcal{A}_1 =$ 

reconnait les mots ayant 1 nbre impair de a

$\mathcal{A}_2 =$ 

reconnait les mots ayant 1 nbre paire de b.

$\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 =$ 

cf Sakarovitch ex 1.10 chap 1. correction p 195.

reconnait les mots ayant un nombre pair de b et impair de a

QUOTIENT

Soit Σ un alphabet fini
Soient L un langage sur Σ et f un mot de Σ^*

Déf Le langage quotient de L par f est $f^{-1}L = \{ h \in \Sigma^* \mid fh \in L \}$

Rq Il s'agit là du quotient à gauche, c-à-d par des préfixes.
On a de m̂ le quotient à droite, par des suffixes.

Rq $f^{-1}L = f^{-1}(L \cap f\Sigma^*)$ $\qquad L \cap f\Sigma^* = f(f^{-1}L)$

⚠ pas $L = f(f^{-1}L)$
En revanche $L = f^{-1}(fL)$

Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$ un automate sur Σ.

$f^{-1}\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, I_f, F)$ où $I_f = \{ q \in Q \mid \exists i \in I, i \xrightarrow[\mathcal{A}]{f} q \}$

= l'ensemble des états accessibles en lisant f depuis un état initial de $\mathcal{A}$.

= l'automate quotient de $\mathcal{A}$ par f.

Pté $\mathcal{L}(f^{-1}\mathcal{A}) = f^{-1}(\mathcal{L}(\mathcal{A}))$

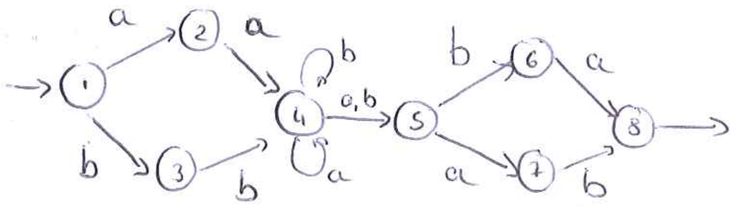
" L'automate quotient reconnait le langage quotient "

↳ **Cor** Le langage quotient d'un langage reconnaissable est lui m̂ reconnaissable.

Rq Si L est un langage sur Σ reconnaissable, c'est-à-dire s'il est reconnu par $\mathcal{A}$ un automate fini sur Σ, alors il n'existe qu'un nombre fini de quotient de L.
En effet pour chaque mot f de Σ^*, le langage quotient $f^{-1}L$ est le langage reconnu par l'automate quotient, lui-même entièrement déterminé par I_f.
Or puisque Q est fini, $\mathcal{P}(Q)$ aussi, et il n'y a donc qu'un nombre fini de I_f possibles.

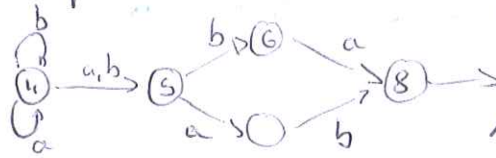
Pour se convaincre

$\Sigma = \{a, b\}$. $\mathcal{A}$.



$L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$

pour $f = aa$ et $f' = bb$ $\quad I_f = \{4\}$.

donc $f^{-1}L = f'^{-1}L = \mathcal{L}\Big($  $\Big)$

(automate quotient émondé)

$\mathcal{L}(A^+ba + A^+ab)$.

Critère de rec. S'il existe une infinité de quotients de L par des mots de Σ^*, alors L n'est pas rec.

ex Sur $\Sigma = \{a, b\}$, $P_1 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$\forall r \in \mathbb{N} \quad (a^r)^{-1}P_1 = \{a^{n-r} b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

donc $\forall r \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N} \quad (b^k \in (a^r)^{-1}P_1$ ssi $k = r)$

donc les $((a^r)^{-1}P_1)_{r \in \mathbb{N}}$ forment une famille infinie de quotients de P_1 deux à deux $\neq$. D'où P_1 n'est pas rec