LE LOGARITHME ÉTOILE

Cf Algorithms de Papadimitriou p 136

Déf $\log^* = \left(\begin{array}{l} \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N} \\ n \longmapsto \inf\{k\in\mathbb{N} \mid \log_2^k(n) \le 1\} \end{array} \right)$

ex $\log_2(3) > \log_2(2) = 1$
$\log_2(\log_2(3)) \le \log_2(\log_2(4)) = \log_2(2) = 1$ $\Big] \to \log_*(3) = 2.$

Pté $\log^*$ est croissante

Preuve Si $n \le p$, puisque le $\log_2$ est st $\nearrow$ et que ses itérés aussi, on a $\forall k \in \mathbb{N}$ $\log_2^k(n) \le \log_2^k(p)$.
En particulier $\log_2^{\log_*(p)}(n) \le \log_2^{\log_*(p)}(p) \le 1$
Donc néc. $\log_*(n) \le \log_*(p)$.

Notation On note $\left(2^{\boxed{k}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} 2^{\boxed{0}} = 1 \\ \forall k\in\mathbb{N}\ 2^{\boxed{k+1}} = 2^{2^{\boxed{k}}} \end{cases}$

"$2^{\boxed{k}} = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}$ k fois"

Pté
- $\log_2(2^{\boxed{0}}) = 0$ et $\forall k\in\mathbb{N}$ $\log_2(2^{\boxed{k}}) = 2^{\boxed{k-1}}$. (a)
- $\forall k \in \mathbb{N}$ $\log_2^k(2^{\boxed{k}}) = 1$ (b)
- $\forall k \in \mathbb{N}$ $\log_*(2^{\boxed{k}}) = k$. (c)

a) clair. b) découle de a) en itérant la 2ème relation.

c) Comme $\log_2^k(2^{\boxed{k}}) = 1$, néc. $\log_*(2^{\boxed{k}}) \le k$.

Or $\forall i \in [0..k-1]$, $\log_2^i(2^{\boxed{k}}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{en itérant (a)}}}{=} 2^{\boxed{k-i}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } k-i \ge 1}}{\ge} 2 > 1$,

D'où $\log_*(2^{\boxed{k}}) = k$.

Pté Avec $I_0 = \{1\}$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $I_k = [2^{\boxed{k-1}} + 1 .. 2^{\boxed{k}}]$
on a $\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in I_k, \log_*(n) = k$.

Preuve
- Si $n \in I_0$, $n = 1$ et $id(n) = 1 \leq 1$ donc $\log_*(n) = 0$.
- Si $k > 0$ et si $n \in [2^{\boxed{k-1}} + 1 .. 2^{\boxed{k}}]$.

Comme $2^{\boxed{k-1}} < n \leq 2^{\boxed{k}}$, par croissance de $\log_*$ on a
$k-1 = \log_*(2^{\boxed{k-1}}) \leq \log_*(n) \leq \log_*(2^{\boxed{k}}) = k$.

Or puisque $\log_2$ est st. croissant $\log_2^k(n) > \log_2^k(2^{\boxed{k}}) = 1$
donc $\log_*(n) \neq k$. D'où $\log_*(n) = k$.

Ex

$I_0 = \{1\}$
$I_1 = \{2\}$
$I_2 = \{3, 4\}$
$I_3 = [5 .. 2^4 = 16]$
$I_4 = [17 .. 2^{16} = 65536]$
$I_5 = [65537 .. 2^{65536}]$.

En pratique on n'ira pas plus loin.

Pté Si $n > 2$, $\log_*(\log_2(n)) = \log_*(n) - 1$

Preuve Si $\log_*(n) = k \geq 1$, $n \in I_k = [2^{\boxed{k-1}} + 1 .. 2^{\boxed{k}}]$
On a alors $2^{2^{\boxed{k-2}}} < n \leq 2^{2^{\boxed{k-1}}}$, donc par croissance stricte de $\log_2$
on a $2^{\boxed{k-2}} < \log_2(n) \leq 2^{\boxed{k-1}}$ soit $\log_2(n) \in I_{k-1}$
donc $\log_*(\log_2(n)) = k-1 = \log_*(n) - 1$.