Autebert (94) p 119
(87) p 193

MODES D'ACCEPTATION D'UN AUTOMATE À PILE

Considérons $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, Z, q_0, z_0, \delta)$ un automate à pile,
et $f \in \Sigma^*$ un mot

Déf

- f est accepté par pile vide par A
  $\Leftrightarrow$ il existe un calcul de (q_0, z_0) à (q, ε) étiqueté par f dans A

- Si on désigne $Acc \subset Q$ un ens d'états acceptants
  f est accepté par état d'acceptation
  $\Leftrightarrow$ il existe un calcul de (q_0, z_0) à (q, ω) où $q \in Acc$ dans A

- Si on désigne $z_{acc} \in Z$ un symbole acceptant
  f est accepté par symbole d'acceptation
  $\Leftrightarrow$ il existe un calcul de (q_0, z_0) à (q, z_{acc}) dans A

Rq Si on désigne $Acc \subset Q$ on peut aussi définir
f est accepté par état d'acc et pile vide
$\Leftrightarrow$ il existe un calcul de (q_0, z_0) à (q, ε) où $q \in Acc$ dans A

Déf

$\mathcal{L}_{p.v}(\mathcal{A}) = \{ f \in \Sigma^* \mid f$ est accepté par pile vide par $\mathcal{A} \}$
$\mathcal{L}_{acc}(\mathcal{A}, Acc) = \{ \text{—} \mid$ ———— état d'acc. selon Acc par $\mathcal{A} \}$
$\mathcal{L}_{s.acc}(\mathcal{A}, z_{acc}) = \{ \text{—} \mid$ ———— symbole d'acc z_{acc} par $\mathcal{A} \}$
$\mathcal{L}_{\substack{p.v \\ acc}}(\mathcal{A}, Acc) = \{ \text{—} \mid$ ———— état d'acc et pile vide par $\mathcal{A} \}$

Déf $\mathcal{A}$ est à fond de pile testable
$\Leftrightarrow$ il existe une partition de Z en $Z_1 \cup Z_2$ telle que
pour tout calcul valide de (q_0, z_0) à (q, h) dans $\mathcal{A}$
on a néc $h \in Z_2^* Z_1 \cup \{\varepsilon\}$

ie "le fond de la pile est ch' de Z_1, le reste ch' de Z_2"

"Équivalence des modes de reconnaissance"

Pour un automate à pile donné les différents modes d'acceptaᵒ ne sont pas équivalents. Mais il y a équivalence au sens où un langage reconnu par un automate sur un certain mode l'est aussi par un autre automate sur n'importe quel autre mode.

lemme Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, Z, q_0, z_0, \delta)$ un automate à pile.
Il existe un automate à pile $\mathcal{A}'$ tel que $\mathcal{L}(\mathcal{A}') = \mathcal{L}(\mathcal{A})$.

Preuve On pose $\mathcal{A}' = (Q, \Sigma, Z_1 \cup Z_2, q_0, v_0, \delta')$
où $Z_2 = Z = \{z_0, z_1, \dots z_m\}$ et $Z_1 = \{v_0, v_1 \text{——} v_n\}$
(plus propremᵗ on pose $Z_2 = Z$, et Z_1 un ens de symbole disjoint de Z_2 de m̂ cardinal, implicitemᵗ en bijecᵒ avec Z_2)

et $\delta' = \{(q, v_i \xrightarrow{a} q', h v_j) \mid (q, z_i \xrightarrow{a} q', z_j) \in \delta\} \cup \delta$

↳ $\mathcal{A}'$ est bien à fond de pile testable, avec Z_1 l'ens de fond de pile.
En effet initialemᵗ le fond de pile est $v_0 \in Z_1$
Et les seules fois où on écrit du "v" c'est là où on a lu du "v" (cf les transiᵒ ajoutées à δ pour obtenir δ')
Cela permet par récurrence, d'assurer que le fond de pile sera du "v" (ie $\in Z_1$) tandis que le reste n'en sera pas (ie $\in Z_2$).

↳ $\mathcal{L}(\mathcal{A}') = \mathcal{L}(\mathcal{A})$. (Pour chaque mode de reconnaissance)
- $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{A}')$ est relativemᵗ clair car à l'exception des transitions qui lisent le fond de pile qui doivent être changées en une transiᵒ analogue, un calcul valide dans $\mathcal{A}$ le reste dans $\mathcal{A}'$, donc un mot reconnu par $\mathcal{A}$ l'est par $\mathcal{A}'$.
- $\mathcal{L}(\mathcal{A}') \subset \mathcal{L}(\mathcal{A})$ il suffit de transformer le calcul dans l'autre sens, de changer les transitions $q, v_i \xrightarrow{a} q', h v_j$ en $q, z_i \xrightarrow{a} q', z_j$ pour les rendre valides dans $\mathcal{A}$.

NB: Dans le cas d'acceptaᵒ sur symbole acceptant il faut cependant veiller à changer de symbole acceptant : au lieu de z_i seulemᵗ, il faut accepter z_i et v_i.

Pté ! Soit L un langage sur Σ.
On a les équivalences suivantes :

il existe $\mathcal{A}$ automate à pile sur Σ tel que $L = \mathcal{L}_{acc}(\mathcal{A}, Acc)$ $\overset{(1)}{\Longrightarrow}$ il existe $\tilde{\mathcal{A}}$ un automate à pile sur Σ tel que $L = \mathcal{L}_{pv}(\tilde{\mathcal{A}})$

$\Uparrow$ (4) $\qquad\qquad$ $\Downarrow$ (2)

il existe $\bar{\mathcal{A}}$ automate à pile sur Σ tel que $L = \mathcal{L}_{s.a}(\bar{\mathcal{A}}, z_{acc})$ $\overset{(3)}{\Longleftarrow}$ il existe $\hat{\mathcal{A}}$ un automate à pile sur Σ tel que $L = \mathcal{L}_{pv\,acc}(\hat{\mathcal{A}}, \hat{A}_{cc})$

<u>Preuve</u> (1). D'après le lemme on peut supposer que $\mathcal{A}$ est à fond de pile testable et on l'écrit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \underset{\text{fond de pile}}{Z_1} \cup \underset{\text{reste}}{Z_2}, z_0, q_0)$ avec $Acc \subset Q$.

On pose alors $\tilde{\mathcal{A}} = (Q \cup \{q_\varepsilon\}, \Sigma, Z \cup \{t\}, z_0, q_0, \tilde{\delta})$

où $Z = Z_1 \uplus Z_2$ et t est un symbole n'apparaissant pas dans Z.
q_ε est un état $\notin Q$.

$\tilde{\delta} = \underline{\delta \setminus \{(q, z \xrightarrow{a} q', \varepsilon) \mid z \in Z_1\}} \cup \underline{\{(q, z \xrightarrow{a} q', t) \mid (q, z \xrightarrow{a} q', \varepsilon) \in \delta \text{ et } z \in Z_1\}}$
$\cup \underline{\{(q, z \xrightarrow{\varepsilon} q_\varepsilon, \varepsilon)(q_\varepsilon, z \xrightarrow{\varepsilon} q_\varepsilon, \varepsilon) \mid q \in Acc\}}$

Grâce à — on permet de vider la pile pour des calculs qui avaient atteint un état acceptant.
Cela assure $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{A}})$.

~~Mais cela a potentiellem' introduit des problème en . à des calculs d'être prolongé~~

Le fait de vider la pile (potentiellem') au milieu d'un mot n'a pas d'impact car ça amène sur q_ε qui est un puits.

A l'inverse en acceptant sur pile vide on accepte peut-être des mots étiquettes d'un calcul terminant sur une configura° (q, ε) où $q \notin Acc$.

Mais un tel calcul termine néc par une transi° $q, z \xrightarrow{a} q', \varepsilon$ où $z \in Z_1$. Or on a pris la précaution d'enlever ce genre de transi° dans $\tilde{\mathcal{A}}$, en les remplaçant par $q, z \xrightarrow{a} q', t$

NB : les remplacer n'est pas vraiment néc.
On aurait pu seulem' les supprimer.

(2) Il suffit de poser $\hat{\mathcal{A}} = \tilde{\mathcal{A}}$ et $\hat{A}cc = \hat{Q}$.
Tout état étant acceptant un mot $f \in \mathcal{L}_{acc\,pv}(\hat{\mathcal{A}}) \Leftrightarrow f \in \mathcal{L}_{p.v}(\hat{\mathcal{A}}) = \mathcal{L}_{p.v}(\tilde{\mathcal{A}})$

(3) D'après le lemme on suppose $\hat{\mathcal{A}}$ à fond de pile testable et on l'écrit alors $\hat{\mathcal{A}} = (Q, \Sigma, \underbrace{Z_1}_{fond} \cup Z_2, q_0, z_0, \hat{\delta})$. On suppose qu'il accepte sur $\hat{A}cc$

On pose $\bar{\mathcal{A}} = (Q, \Sigma, Z \cup \{t\}, q_0, z_0, \bar{\delta})$ acceptant sur le symbole $\underline{t}$
où $Z = Z_1 \cup Z_2$ et t est un nouveau symbole de pile ie $t \notin Z$.
$\bar{\delta} = \delta \setminus \{(q, z \xrightarrow{a} q', \varepsilon) \mid q' \in \hat{A}cc, z \in Z_1\} \cup \{(q, z \xrightarrow{a} q', t) \mid q' \in Acc, z \in Z_1\}$.

ainsi :
$c_0 \xrightarrow{a_1} c_1 \cdots c_n \xrightarrow{a_n} q', \varepsilon$ avec $q' \in \hat{A}cc$ est un calcul valide ds $\mathcal{A}$
ssi $c_0 \xrightarrow{a_1} c_1 \cdots c_n \xrightarrow{a_n} q', t$ est un calcul valide dans $\bar{\mathcal{A}}$.

car le fait que chaque configura c_i soit origine d'une transi assure dans $\mathcal{A}$ que la pile n'est pas vide, dans $\hat{\mathcal{A}}$, que le sommet de pile n'est pas t et donc que la tr existe aussi bien dans $\hat{\delta}$ et $\bar{\delta}$.
Puisque les mots de $\mathcal{L}_{p.v\,acc}(\hat{\mathcal{A}}, \hat{A}cc)$ sont exactem^t les étiquettes de calculs de la forme $c_0 \xrightarrow{a} c_1 \cdots \xrightarrow{a_n} c_n \xrightarrow{a_{n+1}} q', \varepsilon$ avec $q' \in \hat{A}cc$ dans $\mathcal{A}$, ils sont aussi exactem^t les étiquettes de calculs $c_0 \xrightarrow{a} c_1 \cdots \to c_n \xrightarrow{a_{n+1}} q', t$ dans $\bar{\mathcal{A}}$, aut. dit ce sont les mots de $\mathcal{L}_{s.a}(\bar{\mathcal{A}}, t)$.

(4) On pose $\mathcal{A} = (Q \cup \{q_f\}, \Sigma, Z, q_0, z_0, \delta)$ pour $\hat{\mathcal{A}} = (Q, \Sigma, Z, q_0, z_0, \hat{\delta})$
avec $q_f \notin Q$ un nouvel état
et $\delta = \hat{\delta} \cup \{(q, z_{acc} \xrightarrow{\varepsilon} q_f, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{peu importe}}}{\varepsilon}) \mid q \in Q, z_{acc}$ symbole acc$\}$.

$f \in \mathcal{L}_{s.a}(\hat{\mathcal{A}}, z_{acc}) \Leftrightarrow$ il existe un calcul $c_0 \xrightarrow{f_1} c_1 \cdots \xrightarrow{f_n} (q, z_{acc}\,w)$ valide dans $\mathcal{A}$
où $f = f_1 \cdots f_n$

$\Leftrightarrow$ il existe un calcul $c_0 \xrightarrow{f_1} c_1 \cdots \xrightarrow{f_n} (q, z_{acc}\,w) \xrightarrow{\varepsilon} (q_f, w)$ (où $f = f_1 \cdots f_n$) valide dans $\hat{\mathcal{A}}$ } en ajoutant une étape de calcul grâce aux transitions ajoutées à $\hat{\delta}$ ds δ

$\Leftrightarrow f \in \mathcal{L}_{acc}\{\mathcal{A}, \{q_f\}\}$.

Ccl On pourra dire qu'un langage est reconnu par un automate à pile sans préciser pour quel mode de reconnaissance.