LE PROBLÈME ULS

Problème réel

On cherche à planifier la production d'un produit (une seule référence = single item) sur T périodes (= jour ici)

Pour chaque jour on doit choisir si l'on produit ou non et si oui combien, dans le but de répondre à un carnet de commandes.*

Les commandes sont connues et données jour par jour.

Par ailleurs on connaît le coût de stockage unitaire du produit, le coût de produc° ainsi que le coût de configura° de l'usine les jour où on produit (setup)

Le but est de fournir un plan de production qui satisfait les demandes à moindre coûts.

On suppose que le stock initial est nul, ainsi que le stock final.

Uncapacitated Lot-Sizing

* On n'a pas de contrainte de capacité, ni sur la production, ni sur le stock.

Notations

- T = horizon de temps $\in \mathbb{N}$
- $(d_t)_{t\in[1..T]}$ les demandes journalières $\in (\mathbb{R}^{+*})^T$ → on suppose que les demandes ne sont jamais nulles
- $(f_t)_{t\in[1..T]}$ les coûts de setup journaliers $\in (\mathbb{R}^+)^T$
- $(p_t)_{t\in[1..T]}$ les coûts de produc° unitaires journaliers $\in (\mathbb{R}^+)^T$
- $(h_t)_{t\in[1..T]}$ ——— stockages ———
- De plus pour $t\in[1..T]$, $t'\in[1..T]$ on notera $d_{t,t'} = \sum_{i=t}^{t'} d_i$ (pour $t \le t'$).

Formulation agrégée

$$\min \sum_{t=0}^{T} \underbrace{p_t x_t + f_t y_t}_{\text{coûts de produc°}} + \underbrace{h_t s_t}_{\text{coûts de stockage}}$$

1. $\forall t\in[1..T],\ x_t \geq 0$
2. $\forall t\in[1..T],\ y_t \in \{0,1\}$
3. $\forall t\in[1..T],\ s_t \geq 0$
4. $\forall t\in[1..T],\ s_{t-1} + x_t - d_t = s_t$ où $s_0 = 0$
5. $\forall t\in[1..T],\ x_t \leq \underbrace{\left(\sum_{t'\geq t} d_{t'}\right)}_{\text{"big M"}} y_t$

(6 $s_T = 0$)

x_t représente la qté produite le jour t

y_t représente l'ouverture de l'usine le jour t

s_t représente le stock au jour t

4 traduit l'évolution du stock, avec 3 cela assure notamment que la production suffit à satisfaire la demande

5 assure que $x_t = 0$ si $y_t = 0$

6 est optionnelle car assurée par la minimisation si $h_T > 0$.

Rq On peut remarquer que les variables de stock se déduisent des variables de production, en effet $\forall t,\ s_t = \sum_{i=1}^{t} x_i - \sum_{i=1}^{t} d_t$ s'obtient en sommant 4.

Les vraies décisions consistent en les valeurs qu'on donne aux (x_t).
Les (y_t) s'en déduisent, mais pas par une égalité, on ne pourra pas les remplacer, les éliminer de la formulaᵒ.
A l'inverse puisqu'on peut éliminer les variables de stock $(s_t)_{t\in[1..T]}$, on dira que ce sont des variables secondaires

Formulᵒ agrégée avec coûts réduits

$$\sum_{t=1}^{T} p_t x_t + f_t y_t + h_t s_t = \sum_{t=1}^{T} p_t x_t + f_t y_t + \underbrace{\sum_{t=1}^{T} h_t \times \left(\sum_{i=1}^{t} x_i - \sum_{i=1}^{t} d_t\right)}$$

$$\underbrace{\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{T} \mathbb{1}_{\{i\le t\}} h_t x_i}_{\sum_{i=1}^{T}\left(\sum_{t=i}^{T} h_t\right) x_i} \quad - \underbrace{\sum_{t=1}^{T} h_t \times d_{1,t}}_{\text{constante du problème, } K'}$$

$$= \sum_{t=1}^{T} \left(p_t + \sum_{j=t}^{T} h_j\right) x_t + f_t y_t + K'$$

On pose alors $c_t := p_t + \sum_{j=t}^{T} h_j$ pour chaque $t \in [1..T]$. On dira "coût réduit"

On a ainsi une nouvelle expression de la fonction objectif, qui ne fait pas apparaître les variables de stock.

On va remplacer 3 $s_t \geq 0$ par une contrainte qui assure que la producᵒ va bien satisfaire la demande : $\forall t \in [1..T],\ s_{t-1} + x_t \geq d_t$.
qu'on réécrit plutôt $\sum_{i=1}^{t-1} x_i - d_i + x_t \geq d_t$ soit $\sum_{i=1}^{t} x_i \geq \sum_{i=1}^{t} d_i = d_{1,t}$.

La contrainte 4 n'a pas à être remplacée, puisqu'on l'a prise en compte dans la réécriture de s_t...

D'où la formulation

$$\underline{\min} \sum_{t=1}^{T} f_t y_t + c_t x_t \quad \underline{+K'}$$

1 $\forall t \in [1..T]\quad x_t \geq 0$
2 $\forall t \in [1..T],\ y_t \in \{0,1\}$
3' $\forall t \in [1..T],\ \sum_{i=1}^{t} x_i \geq d_{1,t}$
5 $\forall t \in [1..T],\ x_t \leq M_t y_t$
(6 $s_T = 0$)

⚠ Puisque K' est une constante du problème on ne s'en préoccupe pas pour minimiser, mais il ne faut pas oublier de l'ajouter pour avoir les coûts réels !

Formulation désagrégée

L'idée est de préciser quel jour sera utilisé ce qu'on produit tel jour.
Au lieu d'avoir $(x_t)_{t\in[1..T]}$ on a $(x_{i,k})_{(i,k)\in[1..T]^2}$, où $x_{i,k}$ représente la fraction de la production du jour i qui servira la demande du jour k.

⚠ fraction pas au sens proportion, pas nec $\in [0,1]$.
$x_t = \sum_{k\geq t} x_{t,k}$

D'où la formulation ci-contre

$$\begin{cases} \underline{\min} \sum_{t=0}^{T} f_t y_t + c_t \times \sum_{k=t}^{T} x_{t,k} + K' \\ \tilde{1} \begin{cases} \forall t\in[1..T],\ \forall k\in[1..t-1],\ x_{t,k}=0 \\ \forall t\in[1..T],\ \forall k\in[t..T],\ x_{t,k}\geq 0 \end{cases} \\ 2 \quad \forall t\in[1..T],\ y_t\in\{0,1\} \\ \tilde{3} \quad \forall k\in[1..T],\ \sum_{t=1}^{k} x_{t,k} = d_k \\ \tilde{5} \quad \forall t\in[1..T],\ \forall k\in[t..T],\ x_{t,k}\leq d_k\times y_t \end{cases}$$

Rq Cette formulation, contrairem' à la précédente, ne gomme pas les symétries.
Cela signifie qu'à une même situation réelle, correspondent plusieurs valeurs des variables.

ex) lundi et mardi on produit 10
de mercredi à samedi on livre 5 à nos clients } 1 situation réelle

$d_{Me} = 5$ $\quad x_{Lu} = 10$ $\rightsquigarrow x_{Lu,Ve} = 5$ et $x_{Lu,Sa} = 5$ — 1ère possibilité
$d_{Je} = 5$ $\quad\quad\quad\quad \rightsquigarrow x_{Lu,Me} = 5$ et $x_{Lu,Je} = 5$ — 2ème possibilité
$d_{Ve} = 5$ $\quad x_{Ma} = 10$ $\rightsquigarrow x_{Ma,Ve} = 5$ et $x_{Ma,Sa} = 5$
$d_{Sa} = 5$ $\quad\quad\quad\quad \rightsquigarrow x_{Ma,Me} = 5$ et $x_{Ma,Je} = 5$

une affecta° des variables qui correspond à cette réalité en agrégé

plusieurs affectations des variables qui correspondent à cette même réalité dans la version désagrégée

Cependant cette formula° est avantageuse car elle fournit des inégalités "plus serrées", à comprendre au sens du théorème suivant

Pté (ADMIS) Les solutions du relaché continu de cette formulation désagrégée sont exactement l'enveloppe convexe des solutions entières du problème. On parle alors de formula° étendue.

→ Cor "ULS" $\in P$ puisqu'il suffit de résoudre un PL