Leg. / Schwarzentruber p83 ex 77.

RATIONNEL ⇒ LL(1)

Déf Un langage est LL(1) s'il est le langage engendré par une grammaire LL(1).

Pté Si L est un langage rationnel, alors il est LL(1). De plus on peut construire une grammaire LL(1) engendrant L à partir d'un automate fini dét. et complet reconnaissant L.

Preuve Soit $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \delta, \{q_0\}, F)$ un automate fini dét, complet reconnaissant L.

Puisque Q est fini on peut indexé les états par $[0..p]$: $Q = \{q_i \mid i \in [0..p]\}$.

On pose alors $G = (\Sigma, \Gamma = \{S_i \mid i \in [0..p]\}, R, S_0)$

où $R = \{S_i \to a S_j \mid (q_i \xrightarrow{a} q_j) \in \delta\} \cup \{S_i \to \varepsilon \mid S_i \in F\}$

MQ G est LL(1)

Si $S_i \to \alpha$ et $S_i \to \beta$ sont deux règles ≠ de G.

→ si $\alpha \neq \varepsilon$ et $\beta \neq \varepsilon$, on écrit $\alpha = a S_j$, $\beta = b S_k$ (pour des certains $a \in \Sigma$, $b \in \Sigma$, $(j,k) \in [0..n]^2$)

Par définition de R, $q_i \xrightarrow{a} q_j \in \delta$
$q_i \xrightarrow{b} q_k \in \delta$.

Si $a = b$, puisque $\alpha \neq \beta$ $j \neq k$, donc $q_i \xrightarrow{a} q_j \in \delta$ et $q_j \xrightarrow{b} q_k \in \delta$.
IMP puisque $\mathcal{A}$ est déterministe.

Donc $a \neq b$ et comme premier $(\alpha) = \{a\}$
premier $(\beta) = \{b\}$

on est assuré de ne pas avoir de conflit.

→ si $\alpha = \varepsilon$, $\beta \neq \varepsilon$. (et $S_i \in F$). Écrivons $\beta = b S_j$ ainsi premier$(\beta) = \{b\}$.
Il nous faut ici étudier suivant(S_i).
Notons que puisque les règles de la forme $X \to \varepsilon$ n'entrent pas dans le calcul de suivant et que toutes les autres sont de la forme $X \to aY$, l'algo de calcul de suivant se réécrit

$s_0(X) = \begin{cases} \{\Gamma\} & \text{si } X = S_0 \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$; $s_{n+1}(X) = s_n(X) \cup \bigcup_{\substack{Y \text{acc} \\ Y \to aX}} s_n(Y)$

Donc pour tout $X \in \Gamma$ on a $s(X) = \emptyset$ ou $s(X) = \{\Gamma\}$.

En particulier ici $s(S_i) = \emptyset$ ou $\{\Gamma\}$ donc $s(S_i) \cap$ premier $(\beta) = \emptyset$.

On est assuré ici aussi de n'avoir pas de conflits.

MONTRER QUE $L_G(S) = \mathcal{L}(\mathcal{A})$

Soit $u = u_1 \text{——} u_n \in \Sigma^*$ (n éventuellem^t $= 0$ auquel cas $u = \varepsilon$)

$u \in L_G(S)$ ssi il existe une dériva$^°$ $S_0 \to u_1 S_{i_1} \to u_1 u_2 S_{i_2} \ldots \to u S_{i_n} \to u$

ssi il existe $(i_k)_{k \in [1..n]} \in [0..p]^n$ tel que $\forall k \in [0..n-1]$ $S_{i_k} \to u_k S_{i_{k+1}} \in R$ et $S_n \to \varepsilon$ (avec $i_0 = 0$)

ssi $\overline{\text{et } q_n \in F \text{ (avec } i_0 = 0)}$ $(q_{i_k} \xrightarrow{u_k} q_{i_{k+1}}) \in \delta$

ssi il existe un calcul $\to (q_0) \xrightarrow{u_1} (q_{i_1}) \xrightarrow{u_2} (q_{i_2}) \ldots \xrightarrow{u_n} (q_n) \to$

ssi $u \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$.

⚠ LL(1) $\not\Rightarrow$ rationnel

ex

$L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas rationnel (cf lemme de l'étoile pour non reconnaissable puis th de Kleene pour rec $\Leftrightarrow$ rat.)

Mais $L = L_G(S)$ pour $G : S \to \varepsilon \mid aSb$.