TIERS EXCLU EN LOGIQUE CLASSIQUE

Rappel Rappelons les règles de la logique classique concernant le non et l'absurde.

$$\dfrac{\Sigma, A \vdash \bot}{\Sigma \vdash \neg A}\neg i \qquad \dfrac{\Sigma \vdash A \quad \Sigma \vdash \neg A}{\Sigma \vdash \bot}\neg é \qquad \dfrac{\Sigma, \neg A \vdash \bot}{\Sigma \vdash A}\bot_c$$

Lemmes Nous aurons besoin de la distributivité du $\neg$ sur le $\wedge$.
MQ $\neg(P \wedge Q) \vdash \neg P \vee \neg Q$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(\neg P \vee \neg Q), \neg P \vdash \neg(\neg P \vee \neg Q)}\text{ax} \quad \dfrac{\dfrac{}{\neg(\neg P \vee \neg Q), \neg P \vdash \neg P}\text{ax}}{\neg(\neg P \vee \neg Q), \neg P \vdash \neg P \vee \neg Q}\vee i}{\neg(\neg P \vee \neg Q), \neg P \vdash \bot}\neg é}{\underline{\neg(\neg P \vee \neg Q) \vdash P}\ 1}\bot_c$$

On a de m̂ $\underline{\neg(\neg P \vee \neg Q) \vdash Q}\ 2$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(\neg P \vee \neg Q) \vdash P}1 \quad \dfrac{}{\neg(\neg P \vee \neg Q) \vdash Q}2}{\neg(\neg P \vee \neg Q) \vdash P \wedge Q}\wedge i}{\neg(P \wedge Q), \neg(\neg P \vee \neg Q) \vdash P \wedge Q}\text{aff} \quad \dfrac{}{\neg(P \wedge Q), \neg(\neg P \vee \neg Q) \vdash \neg(P \wedge Q)}\text{ax}}{\dfrac{\neg(P \wedge Q), \neg(\neg P \vee \neg Q) \vdash \bot}{\neg(P \wedge Q) \vdash \neg P \vee \neg Q}\bot_c}\neg é$$

Nous aurons aussi besoin de pouvoir éliminer $\neg\neg$.
MQ si $\Sigma \vdash \neg\neg A$, alors $\Sigma \vdash A$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Sigma \vdash \neg\neg A}\text{hyp}}{\Sigma, \neg A \vdash \neg\neg A}\text{aff} \quad \dfrac{}{\Sigma, \neg A \vdash \neg A}\text{ax}}{\Sigma, \neg A \vdash \bot}\neg é}{\Sigma \vdash A}\bot_c$$

D'où la règle $\dfrac{\Sigma \vdash \neg\neg A}{\Sigma \vdash A}\neg\neg é$

le tiers-exclu

Montrons maintenant que $\emptyset \vdash A \vee \neg A$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(A\wedge\neg A)\vdash A\wedge\neg A}\,\text{ax}}{(A\wedge\neg A)\vdash A}\,\wedge\acute{e} \qquad \dfrac{\dfrac{}{(A\wedge\neg A)\vdash A\wedge\neg A}\,\text{ax}}{(A\wedge\neg A)\vdash \neg A}\,\wedge\acute{e}}{(A\wedge\neg A)\vdash\bot}\,\neg\acute{e}}{\emptyset\vdash\neg(A\wedge\neg A)}\,\bot c \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(A\wedge\neg A)\vdash\neg A\vee\neg\neg A}\,\text{lemme} \quad \dfrac{\dfrac{}{\neg A\vdash\neg A}\,\text{ax}}{\neg A\vdash A\vee\neg A}\,\vee i \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\neg A\vdash\neg\neg A}\,\text{ax}}{\neg\neg A\vdash A}}{\neg\neg A\vdash A\vee\neg A}}{\neg(A\wedge\neg A)\vdash A\vee\neg A}\,\vee\acute{e}}{\emptyset\vdash\neg(A\wedge\neg A)\to A\vee\neg A}\,\to i}{\emptyset\vdash A\vee\neg A}\,\to\acute{e}$$

On en déduit que si $\Sigma, A\vdash B$ et $\Sigma,\neg A\vdash B$ alors $\Sigma\vdash B$

$$\dfrac{\dfrac{\emptyset\vdash A\vee\neg A}{\Sigma\vdash A\vee\neg A}\,\text{aff} \qquad \dfrac{}{\Sigma, A\vdash B}\,\text{hyp} \qquad \dfrac{}{\Sigma,\neg A\vdash B}\,\text{hyp}}{\Sigma\vdash B}\,\vee\acute{e}$$

D'où la règle $\dfrac{\Sigma, A\vdash B \qquad \Sigma,\neg A\vdash B}{\Sigma\vdash B}\,\text{t.e}$