# Distance à une partie

Soit $(X,d)$ un espace métrique. Soit $A$ une partie non vide de $X$.

102.1 **Déf** La distance à la partie $A$ est $d_A = \begin{pmatrix} E \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \inf_{a\in A} d(x,a) \end{pmatrix}$

102.2 **Déf** Pour $x\in X$, on dit que $p$ est une projection de $x$ sur $A$ si $\begin{cases} d(x,p) = d_A(x) \\ p\in A \end{cases}$

102.3 **Pté** Pour $(x,y)\in X^2$ on a $|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x,y)$

Cela reviendrait dans un EVN $X$, à dire que $d_A$ est 1-lipschitzienne

Preuve : Soit $(x,y)\in X^2$. L'inégalité triangulaire donne $\forall z\in X\ d(x,z) \leq d(y,z) + d(x,y)$

donc $d_A(x) = \inf_{z\in A\subset X} d(x,z) \leqslant \inf_{z\in A} \left(d(x,y) + d(y,z)\right) = d(x,y) + \inf_{z\in A} d(y,z) = d(x,y) + d_A(y)$

D'où $d_A(x) - d_A(y) \leq d(x,y)$.

Symétriquement on a $d_A(y) - d_A(x) \leq d(y,x) = d(x,y)$.

D'où finalement $|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x,y)$.

102.4 **Pté** • $\bar{A} = \{x\in X \mid d_A(x) = 0\}$

102.5 • Si $A$ n'est pas fermé, il existe $x\in X$ qui n'a aucune projection sur $A$.

Preuve (a) Soit $x\in \bar{A}$. Il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in A^{\mathbb{N}}$ tel que $(a_n)$ converge vers $x$, soit $d(a_n,x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc $\forall \varepsilon\in\mathbb{R}^{+*}$, il existe $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $d(a_n,x) < \varepsilon$ et comme $d_A(x) \leqslant d(a_n,x)$

on a $d_A(x) \leqslant \varepsilon$. Ceci étant pour tout $\varepsilon\in\mathbb{R}^{+*}$, néc $d_A(x) = 0$.

Réciproquement si $x\in X$ tel que $d_A(x) = 0$ on a $\inf_{a\in A} d(x,a) = 0$, ce qui par définition implique que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\exists\, a_n\in A$, $d(x,a_n) \leqslant 0 + \frac{1}{n}$. On construit ainsi une suite d'éléments de $A$ tendant vers $x$, donc $x\in\bar{A}$

(b) Si $A$ n'est pas fermé, $A\neq\bar{A}$ donc il existe $x\in \bar{A}\setminus A$. Puisque $x\in\bar{A}$, on a $d_A(x) = 0$.

Si $p\in A$, $p\neq x$ donc $d(x,p)\neq 0$ soit $d(x,p)\neq d_A(x)$. Donc $p$ n'est pas proj de $x$.

D'où $x$ n'a aucune projection sur $A$.

102.6 **Pté** Soit $E$ un EVN. Soit $A$ une partie de $E$. On a :

$$\left.\begin{array}{l} x \in E \setminus A \\ p \text{ est une projection de } x \text{ sur } A \end{array}\right\} \Rightarrow p \in \mathrm{Front}(A).$$

Preuve En effet si $x \in A^c$ pour tout $\tilde{p} \in \mathring{A}$ on a $p \neq x$ donc $\|p-x\| > 0$ et il existe alors $r \in ]0, \|p-x\|[$ tel que $\mathcal{B}(\tilde{p}, r) \subset A$.
On pose alors $u = \frac{x-\tilde{p}}{\|\tilde{p}-x\|}$ ainsi $\tilde{p} + \frac{r}{2}u \in \mathcal{B}(\tilde{p}, r) \subset A$

$$\text{et } \|x - \underbrace{(\tilde{p} + \tfrac{r}{2}u)}_{\in A}\| = \|x - \tilde{p} + \frac{r}{2\|\tilde{p}-x\|} x - \tilde{p}\|$$

$$= \|\underbrace{\left(1 - \frac{r}{2\|\tilde{p}-x\|}\right)}_{>0} x - \tilde{p}\|$$

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{r}{2\|\tilde{p}-x\|}\right)}_{<1} \|x - \tilde{p}\|$$

$$< \|x - \tilde{p}\|$$

Donc $\tilde{p}$ n'est pas une projection de $x$ sur $A$.
On en déduit que $p \notin \mathrm{int}(A)$. or par déf $p \in A$, d'où néc $p$ est dans la frontière de $A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$.

102.7. **Pté** Soit $E$ un EVN. Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2_{\setminus \{\emptyset\}}$. $d(A,B) = \inf\{\|a-b\| \mid a \in A, b \in B\}$

$\left.\begin{array}{l} A \text{ fermée} \\ B \text{ compacte} \end{array}\right\} \Rightarrow$ Il existe $(a,b) \in A \times B$ tq $d(A,B) = d(a,b)$
aut. dit la distance de $A$ à $B$ est réalisée, l'inf est atteint.

Preuve Soit $(a_n, b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite minimisante ie tq $d(a_n, b_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} d(A,B)$.
Par compacité de $B$ on peut se ramener par extraction à $(b_n)$ cv vers $b \in B$, il existe alors $N_1 \in \mathbb{N}$, tq $\forall n \geq N_1$ $d(b_n, b) \leq 1$, et comme il existe aussi $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_2$ $d(a_n, b_n) \leq d(A,B) + 1$ on en déduit qu'à partir du rang $N = \max(N_1, N_2)$ on a $d(a_n, b) \leq d(A,B) + 2$ (par inégalité triangulaire). En considérant l'intersection $A \cap \mathcal{B}(b, d(A,B)+2)$, qui est compacte on peut aussi se ramener à $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cv vers $a \in A$. Alors $d(a,b) = \lim_{n \to +\infty} d(a_n, b_n) = d(A,B)$.