Projection sur un SEV fermé

avec Hirsch-Lacombe p 92.

Notons d'abord qu'un SEV est nécessairement un convexe puisque la stabilité par combinaison linéaire implique celle par combinaison convexe. Il est aussi non vide car contient 0. Ainsi un SEV fermé est en particulier un convexe fermé non vide, on va donc utiliser les résultats de projection énoncés en 103. Plaçons nous dans le même cadre :
Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit F un SEV fermé de H. Notons P_F la projection sur F.
On rappelle que $F^\perp = \{x \in H \mid \forall y \in F,\ \langle x | y \rangle = 0\}$.

105.1 **Plé** $\forall y \in H, \forall p \in H$, $\underline{p = P_F(y) \iff p \in F \text{ et } y - p \in F^\perp}$

Preuve Soit $y \in H$. Soit $p \in H$.

$p = P_F(y) \iff p \in F$ et $\forall x \in F, \mathrm{Re}(\langle p - x \mid p - y \rangle) \leq 0$ d'après 103.2

$\iff p \in F$ et $\forall z \in \underbrace{p - F}_{=F} \mathrm{Re}(\langle z \mid p - y \rangle) \leq 0$) car F SEV et $p \in F$

$\iff p \in F$ et $\forall z \in F\ \mathrm{Re}(\langle z \mid p - y \rangle) \leq 0$

$\iff p \in F$ et $\forall z \in F\ \mathrm{Re}(\langle z \mid p - y \rangle) \leq 0$ et $\mathrm{Re}(\langle z \mid p - y \rangle) \geq 0$ et $\mathrm{Re}(\langle iz \mid p - y \rangle) \leq 0$, $\mathrm{Re}(\langle -iz \mid p - y \rangle) \leq 0$) car $z \in F \Rightarrow -z \in F$, $iz \in F$

$\iff p \in F$ et $\forall z \in F\ \langle z \mid p - y \rangle = 0$

$\iff p \in F$ et $y - p \in F^\perp$

105.2 **Plé** P_F est linéaire continue et $\|P_F\| = 1$. (si $F \neq \{0\}$)

Preuve Soit $(x_1, x_2) \in H^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
On note $p_1 = P_F(x_1)$, $p_2 = P_F(x_2)$ et $p = \lambda p_1 + p_2$.
Par définition $p_1 \in F$ et $p_2 \in F$, puisque F est un SEV $p \in F$ aussi.
D'après la plé préc, $\forall x \in F$, $\langle x \mid x_1 - p_1 \rangle = 0$ $\langle x \mid x_2 - p_2 \rangle = 0$
donc $\forall x \in F$ $0 = \langle x \mid \lambda(x_1 - p_1) + (x_2 - p_2) \rangle = \langle x \mid (\lambda x_1 + x_2) - \underbrace{\lambda p_1 + p_2}_{= p} \rangle$.
donc $(\lambda x_1 + x_2) - p \in F^\perp$ et $p \in F$, d'après la caract. ci dessus $p = P_F(\lambda x_1 + x_2)$ soit $P_F(\lambda x_1 + x_2) = \lambda P_F(x_1) + P_F(x_2)$. D'où P_F linéaire

D'après 103.3 P_F est 1-lips ; ce qui assure qu'elle est unif. continue et donc aussi continue.

De plus on en déduit aussi $\|P_F\| \leq 1$.

(En effet $\forall (x,y) \in H^2 \quad \|x-y\| \geq \|P_F(x) - P_F(y)\| \underset{\text{par linéarité de } P_F}{=} \|P_F(x-y)\|$

donc $\forall z \in H \quad \|z\| \geq \|P_F(z)\|$)

Si $F \neq \{0\}$. Considérons $x \in F_{\setminus\{0\}}$, on a $\|P_F(x)\| = \|x\|$ car $P_F(x) = x$.

Donc on a $\|P_F\| \geq \dfrac{\|P_F(x)\|}{\|x\|} = 1$ d'où $\|P_F\| = 1$.

105.3 Cor $H = F \oplus F^\perp$

Et le projecteur, au sens linéaire, associé à cette décomposi est P_F.

Preuve : Soit $x \in H$. $x = \underbrace{(x - p_F(x))}_{\in F^\perp} + \underbrace{p_F(x)}_{\in F}$ donc $F + F^\perp = H$.

Or si $x \in F \cap F^\perp$ on a en particulier $\langle x | x \rangle = 0$ soit $\|x\| = 0$ donc $x = 0$

Donc la somme est directe.

105.4 Cor : Critère de densité

Soit V un SEV quelconque de H.

V est dense dans $H \Leftrightarrow V^\perp = \{0\}$

Preuve On a, d'après la ppté ci-dessus $H = \overline{V} \oplus \overline{V}^\perp$ or $\overline{V}^\perp = V^\perp$

donc V dense dans $H \Leftrightarrow \overline{V} = H \Leftrightarrow \overline{V}^\perp = \{0\} \Leftrightarrow V^\perp = \{0\}$.