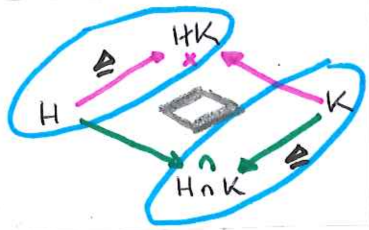
Lemme du papillon (sans papillon) — d'après Lang p 22-23.

107.0 **Rappel** (2ème théorème d'isomorphisme)

Soit G un groupe. Soient H et K deux ss-gpes de G tq $K \leq N_H$

On a alors
- $HK = KH \leq G$
- $H \trianglelefteq HK$ et $H \cap K \trianglelefteq K$
- $K/_{K\cap H} \simeq KH/_H$.



Rq On trouve parfois des hypothèses plus fortes : $\begin{cases} H \trianglelefteq G \\ K \leq G \end{cases}$ car alors $N_H = G$ et $K \leq N_H$.

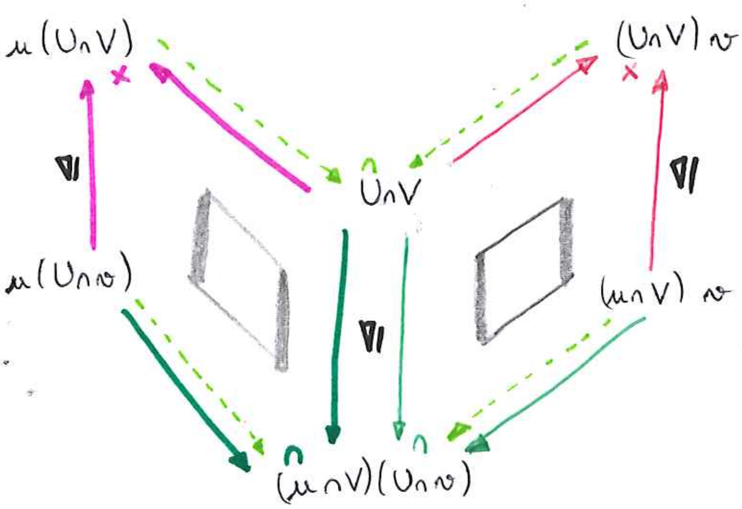
107.1 **Lemme du papillon**

Soit G un groupe. Soient $U \leq G$ et $V \leq G$. Soient $u \trianglelefteq U$ et $v \trianglelefteq V$.

On a alors
- $u(U\cap v) \trianglelefteq u(U\cap V)$
- $(u\cap V)v \trianglelefteq (U\cap V)v$
- $\dfrac{u(U\cap V)}{u(U\cap v)} \simeq \dfrac{(U\cap V)v}{(u\cap V)v}$

Preuve L'idée est de mettre ces deux quotients en bijection (isomorphisme de gpe en fait) avec un même troisième, en utilisant deux fois le 2ème th d'isomorphisme rappelé ci-dessus.

On cherche donc à montrer qu'on est dans la configuration représentée ci contre



Rq Les conventions adoptées ici
- → flèches vers le haut pour désigner un produit
- → flèches vers le bas pour désigner une intersection

sont celles permettant de dessiner le papillon, dont on ne voit que les ailes, ci contre, puisqu'on ne se sert que d'elles pour cette preuve.

1) MONTRER QUE $u(U\cap V)\cap(U\cap V)v = U\cap V$ ---

- $u(U\cap V)\subset uU\subset U$ car $u\leq U$ et de même $(U\cap V)\subset V$ donc $\subseteq$ est claire.
- $(U\cap V)\subset u(U\cap V)$ car $1\in u$ et de même $U\cap V\subset(U\cap V)v$ donc $\supseteq$ aussi.

2) MONTRER QUE $u(U\cap v)\cap(u\cap V)v = (u\cap V)\times(U\cap v)$ ---

- $(u\cap V)\times(U\cap v)\subset u\times(U\cap v)$ car $u\cap V\subset u$, de m̂ $(u\cap V)\times(U\cap v)\subset(u\cap V)v$, on a donc $\supseteq$.
- Réciproquement si $x\in u(U\cap v)\cap(u\cap V)v$. Comme $x\in u(U\cap v)$ il existe $a\in U$ et $b\in(U\cap v)$ tel que $x=ab$. Alors $b^{-1}\in U\cap v$ aussi et $a=xb^{-1}\in(u\cap V)v\times(U\cap v)\subset Vv\times v\subset V$.
Donc $a\in u\cap V$ et alors on a bien $x\in(u\cap V)\times(U\cap v)$. D'où $\subseteq$.

3) MONTRER LES $\trianglelefteq$ ANNONCÉS

a) MQ $u(U\cap v)\trianglelefteq u(U\cap V)$. Comme $v\trianglelefteq V$ on a $U\cap v\trianglelefteq U\cap V$.

Si $h\in u(U\cap v)$ s'écrit $h=ab$ avec $a\in u$ et $b\in U\cap v$, et $g\in u(U\cap V)$ s'écrit AB avec $A\in u$ et $B\in U\cap V$

on a alors $ghg^{-1}=ABabB^{-1}A^{-1}=A\underbrace{(BaB^{-1})}_{\substack{\in u \\ \text{car } a\in u\trianglelefteq U \\ \text{et } B\in U}}\underbrace{(BbB^{-1})}_{\substack{\in U\cap v \\ \text{car } b\in U\cap v\trianglelefteq U\cap V \\ \text{et } B\in U\cap V}}A^{-1} \in u\times u\times(U\cap v)\times u$.

Or d'après le second th. d'isomorphisme appliqué à $u\trianglelefteq U$ et $(U\cap v)\leq U$, $(U\cap v)\times u=u\times(U\cap v)$

Donc $ghg^{-1}\in u\times u\times(u\times(U\cap v))$ donc $ghg^{-1}\in u\cap(U\cap v)$. D'où $u(U\cap v)\trianglelefteq u(U\cap V)$

b) De même on montre que $(u\cap V)v\trianglelefteq(U\cap V)v$.

c) On déduit de a et b que $(u\cap V)\times(U\cap v)\overset{(2)}{=}u(U\cap v)\cap(u\cap V)v\trianglelefteq u(U\cap V)\cap(U\cap V)v\overset{(1)}{=}U\cap V$

4) MONTRER QUE $u(U\cap v)\cap(U\cap V)=(u\cap V)\times(U\cap v)=(U\cap V)\cap(u\cap V)v$

On se contente ici de montrer la première égalité, la seconde se démontrant de manière analogue.

- Soit $x\in u(U\cap v)\cap(U\cap V)$. Comme $x\in u(U\cap v)$ on l'écrit $x=ab$ avec $a\in u$ $b\in U\cap v\subset v\subset V$.
Donc $a=xb^{-1}\in V\times V\subset V$. Donc $a\in(u\cap V)$ et alors $x=ab\in(u\cap V)\times(U\cap v)$. D'où $\subseteq$
- Soit $x\in(u\cap V)\times(U\cap v)$. On l'écrit $x=ab$ avec $a\in(u\cap V)$ et $b\in(U\cap v)$.
Alors $x=ab\in u\times(U\cap v)$; $x=ab\in u\times U\subset U$; $x=ab\subset Vv\subset V$. Donc $x\in u(U\cap v)\cap(U\cap V)$. D'où $\supseteq$.

Par double inclusion on a bien la première égalité. et la deuxième de m̂.

5) MONTRER QUE $u(U\cap v)\times(U\cap V) = u(U\cap V)$ ET QUE $(U\cap V)\times(u\cap V)v = (U\cap V)v$

- Puisque $1 \in U\cap v$, $u(U\cap V) \subset u\times(U\cap v)\times U\cap V$ d'où $\supseteq$ pour la 1ère égalité.
- Réciproquement si $x = abc$ avec $a\in u$ $b\in U\cap v$ et $c\in U\cap V$, on a $bc \in v\times V \subset V$ et $bc\in U\times U\subset U$

Donc $bc \in U\cap V$ et alors $x = a(bc) \in u(U\cap V)$. d'où $\subseteq$ pour la 1ère égalité.

On montre de m̂ la deuxième égalité

6) CONCLURE

On applique maintenant le 2ème théorème d'isomorphisme au deux ailes du papillon.

A gauche avec $\begin{cases} H_1 = u(U\cap v) \trianglelefteq u(U\cap V) \\ K_1 = U\cap V \leq u(U\cap V) \end{cases}$ et donc avec $\begin{cases} K_1 H_1 = u(U\cap V) & (5) \\ K_1\cap H_1 = (u\cap V)\times(U\cap v) & (4) \end{cases}$

on obtient $\boxed{\dfrac{U\cap V}{(u\cap V)\times(U\cap v)} \simeq \dfrac{u(U\cap V)}{u(U\cap v)}}$

A droite avec $\begin{cases} H_2 = (u\cap V)v \trianglelefteq (U\cap V)v \\ K_2 = U\cap V \leq (U\cap V)v \end{cases}$ et donc avec $\begin{cases} K_2 H_2 = H_2 K_2 = (U\cap V)v & (5) \\ K_2\cap H_2 = (u\cap V)\times(U\cap v) & (4) \end{cases}$

on obtient $\boxed{\dfrac{U\cap V}{(u\cap V)\times(U\cap v)} \simeq \dfrac{(U\cap V)v}{(u\cap V)v}}$

On en déduit $\boxed{\dfrac{u(U\cap V)}{u(U\cap v)} \simeq \dfrac{(U\cap V)v}{(u\cap V)v}}$