Sous-groupe à un paramètre et exponentielle

109.0 **Rappels** × Un groupe topologique est un groupe muni d'une topologie pour laquelle la multiplication et le passage à l'inverse sont continus.

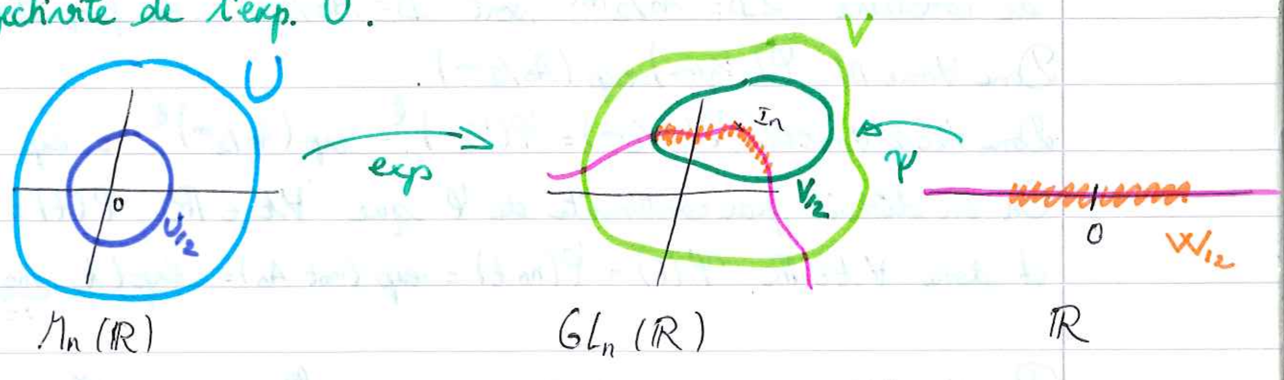
× Un morphisme de groupe topologique est un morphisme de groupe continu.

× L'exponentielle réalise un difféomorphisme local de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $GL_n(\mathbb{R})$ au voisinage de 0.

109.1 **Déf** Soit G un groupe topologique.
Un sous-groupe à 1 paramètre de G est un morphisme de groupe topologique de $(\mathbb{R},+)$ dans G.

109.2 **Pté** Soit Ψ un sous-groupe à un paramètre de $(GL_n(\mathbb{R}),\circ)$.
Il existe un unique $A \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $\Psi = t \mapsto \exp(tA)$.

Preuve : Notons U un voisinage de 0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
V ——— I_n —— $GL_n(\mathbb{R})$
tels que l'exponentielle réalise un homéomorphisme de U dans V.
Quitte à restreindre on peut supposer que U est une boule $\mathcal{B}(0,R)$.
On pose alors $U_{1/2} = \mathcal{B}(0,R/2)$ et $V_{1/2} = \exp(U_{1/2})$, Ainsi en travaillant sur $U_{1/2}$ on a une certaine "marge de manoeuvre" pour rester dans le domaine d'injectivité de l'exp. U.



Puisque Ψ est un morphisme de groupe $\Psi(0) = I_n$.
Et puisque Ψ est continue il existe $W_{1/2}$ un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ tel que $\Psi(W_{1/2}) \subset V_{1/2}$.

Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\overline{B_{\mathbb{R}}(0, \frac{1}{n_0})} \subset W_{/2}$.
En particulier $1/n_0 \in W_{/2}$ donc $\Psi(1/n_0) \in V_{/2}$ donc il existe $A_0 \in U_{/2}$ tel que $\Psi(1/n_0) = \exp(A_0)$. $(\star)$

Pour se débarrasser du facteur n_0 on introduit $\varphi = t \mapsto \Psi\left(\frac{t}{n_0}\right)$.
φ est alors encore un sous-groupe à paramètre de $(GL_n(\mathbb{R}), \circ)$ et il vérifie $\varphi(1) = \exp(A_0)$.

Pour $k \in \mathbb{Z}$ on a, puisque φ est un morphisme de groupe,

$$\varphi(k) = \varphi(k.1) = \varphi(1)^k = \exp(A_0)^k = \exp(k A_0)$$

(On utilise implicitement la multiplicativité de l'exp. pour des matrices qui commutent, à savoir ici les multiples entiers de A_0).

On aimerait étendre ça des $k \in \mathbb{Z}$ aux $t \in \mathbb{R}$. Par continuité de φ on sait qu'il suffit de l'étendre à un ensemble dense dans $\mathbb{R}$.
On choisit ici l'ensemble $\{\frac{k}{2^m} \mid k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\}$, dense dans $\mathbb{R}$.

Montrons par récurrence sur m que $\varphi\left(\frac{1}{2^m}\right) = \exp\left(\frac{A_0}{2^m}\right)$.
La relation au rang 0 est vérifiée d'après $\star$.
Soit $m \geq 0$ supposons que la propriété est vraie au rang m.
$\varphi\left(\frac{1}{2^{m+1}}\right) \in V_{/2}$. (Pour s'en convaincre : $\varphi\left(\frac{1}{2^{m+1}}\right) = \Psi\left(\frac{n_0}{n_0 2^{m+1}}\right) \in \Psi(W_{/2}) \subset V_{/2}$ car $\frac{1}{n_0 2^{m+1}} \leq \frac{1}{n_0}$)
Donc il existe $D \in U_{/2}$ telle que $\exp(D) = \varphi\left(\frac{1}{2^{m+1}}\right)$.
Alors $\varphi\left(\frac{1}{2^m}\right) = \varphi\left(2 \times \frac{1}{2^{m+1}}\right) = \varphi\left(\frac{1}{2^{m+1}}\right)^2 = \exp(D)^2 = \exp(2D)$.
Or par hypothèse de récurrence $\varphi\left(\frac{1}{2^m}\right) = \exp\left(\frac{A_0}{2^m}\right)$, donc $\exp(2D) = \exp\left(\frac{A_0}{2^m}\right)$.
Puisque $D \in U_{/2}$ $2D \in U$, et $\frac{A_0}{2^m} \in U$ (car $A_0 \in U$ et U est 1 boule centrée en 0)
on est sur le domaine d'injectivité de l'exponentielle ce qui permet de conclure $2D = A_0/2^m$ soit $D = A_0/2^{m+1}$. La propriété est vraie au rg $m+1$.
Donc $\forall m \in \mathbb{N}$ $\varphi(1/2^m) = \exp(A_0/2^m)$.
Donc $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{N}$ $\varphi(k/2^m) = \varphi(1/2^m)^k = \exp(A_0/2^m)^k = \exp((k/2^m) A_0)$
On en déduit par continuité de φ que $\forall t \in \mathbb{R}$ $\varphi(t) = \exp(t A_0)$
et donc $\forall t \in \mathbb{R}$ $\Psi(t) = \varphi(n_0 t) = \exp(n_0 t A_0) = \exp(t \underbrace{n_0 A_0}_{:= A})$.

Pour l'unicité supposons que A et B conviennent. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ assez grand pour que $\begin{cases} A/n \in U \\ B/n \in U \end{cases}$. Alors $\Psi\left(\frac{1}{n}\right) = \exp\left(\frac{B}{n}\right) = \exp\left(\frac{A}{n}\right)$ et comme exp est injective sur U on en déduit $B/n = A/n$ soit $B = A$.