Séparation d'un convexe et d'un compact, hyperplan d'appui

On travaille sur $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, qui est donc en particulier un $\mathbb{R}$-EVN.

Déf Soient C_1 et C_2 deux convexes de $\mathcal{H}$.
Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{H}$.

114.1 • On dit que φ sépare C_1 et C_2 au sens large.
ssi $\sup_{x_1 \in C_1} \varphi(x_1) \leq \inf_{x_2 \in C_2} \varphi(x_2)$ ou $\sup_{x_2 \in C_2} \varphi(x_2) \leq \inf_{x_1 \in C_1} \varphi(x_1)$

114.2 • On dit que φ sépare C_1 et C_2 au sens strict
ssi $\sup_{x_1 \in C_1} \varphi(x_1) < \inf_{x_2 \in C_2} \varphi(x_2)$ ou $\sup_{x_2 \in C_2} \varphi(x_2) < \inf_{x_1 \in C_1} \varphi(x_1)$

114.3 Rq. φ sépare au sens LARGE C_1 et C_2 se réécrit : $\left[\begin{matrix}\forall x_1 \in C_1 \\ \forall x_2 \in C_2\end{matrix} \ \varphi(x_1) \leq \varphi(x_2)\right]$ ou $\left[\begin{matrix}\forall x_1 \in C_1 \\ \forall x_2 \in C_2\end{matrix}, \ \varphi(x_2) \leq \varphi(x_1)\right]$

Mais la séparation forte ne peut se réécrire ainsi, m̂ en mettant des inégalités strictes puisque l'inf et le sup peuvent quand même réaliser l'égalité.

ex. $C_1 = \mathrm{epi}(i)$; $C_2 = -\mathrm{epi}(i)$ où $i = \begin{pmatrix} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1/x \end{pmatrix}$

$\varphi = \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto y \end{pmatrix}$ sépare largem^t C_1 et C_2
mais PAS fortement.

En effet $\inf_{x_1 \in C_1} \varphi(x_1) = \inf_{t \in \mathbb{R}^+} (1/t) = 0 = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} -1/t = \sup_{x_2 \in C_2} \varphi(x_2)$

114.4 **Déf** Soit C un convexe. Soit $a \in C$. Soit H un hyperplan affine
H définit deux demi-espaces, H^+ et H^-.

• H est un hyperplan d'appui de C en a ssi $\begin{cases} a \in H \\ C \subset H^- \text{ ou } C \subset H^+ \end{cases}$

114.5 **Pté** Soit C un convexe (non vide) de H. Soit $a \in H$.

a) $a \in \mathrm{int}(C) \Leftrightarrow \{a\}$ et C ne sont pas séparables.
b) $a \in \mathrm{Front}(C) \Rightarrow C$ admet un hyperplan d'appui en a
c) $a \notin \mathrm{adh}(C) \Leftrightarrow \{a\}$ et $\overline{C}$ sont fortement séparables.

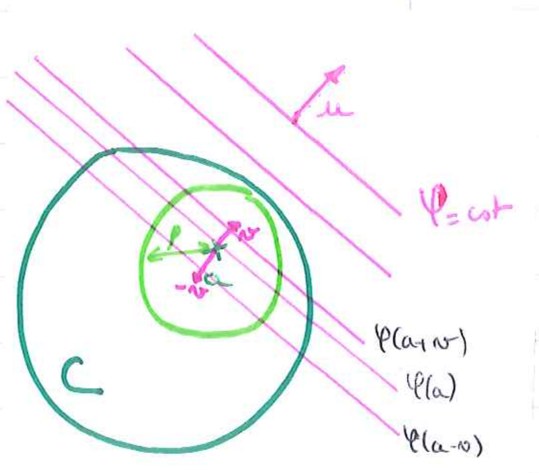
Preuve Vérifions tout d'abord qu'il nous suffit de montrer les trois sens directs de ces propriétés $\overset{a}{\Rightarrow}$ $\overset{b}{\Rightarrow}$ et $\overset{c}{\Rightarrow}$.

$\boxed{\overset{a}{\Leftarrow}}$ • Si $a \notin \mathrm{int}(C)$, soit $a \in \mathrm{Front}(C)$, auquel cas $\{a\}$ et C sont séparables puisque l'hyperplan d'appui les sépare au sens large, soit $a \in \mathrm{adh}(C)^c$, auquel cas $\{a\}$ et C sont aussi séparables puisque fortement séparables. On a donc $\boxed{\overset{a}{\Leftarrow}}$ par contraposée

$\boxed{\overset{c}{\Leftarrow}}$ • Si $a \in \mathrm{adh}(C)$ on ne peut pas le séparer fortem^t de C, en effet pour $\varphi \in H'$ on a $\varphi(a) \leq \sup\limits_{x \in C} \varphi(x)$ et $\varphi(a) \geq \inf\limits_{x \in C} \varphi(x)$
(en considérant $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C^{\mathbb{N}}$ tq $a_n \to a$, qui vérifie $\forall n \inf\limits_{x \in C} \varphi(x) \leq \varphi(a_n) \leq \sup\limits_{x \in C} \varphi(x)$)
donc $\sup\limits_{x \in C} \varphi(x) \not< \inf\limits_{x \in \{a\}} \varphi(x)$ et $\sup\limits_{x \in \{a\}} \varphi(x) \not< \inf\limits_{x \in C} \varphi(x)$.
Ceci montre donc $\boxed{\overset{c}{\Leftarrow}}$.

$\boxed{\overset{a}{\Rightarrow}}$ Si $a \in \mathrm{int}(C)$ il existe par définition $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$ tq $B(a,\rho) \subset C$.
Considérons $\varphi \in H'_{\setminus\{0\}}$. Par le théorème de représentation de Riesz on peut l'écrire $\varphi = \langle u | \cdot \rangle$ pour un certain $u \in H_{\setminus\{0\}}$.
On considère alors $v = \frac{\rho}{2} \frac{u}{\|u\|}$, ainsi $\|v\| < \rho$
donc $a + v \in C$ et $a - v \in C$.

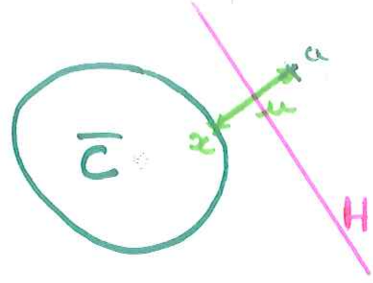
On a $\varphi(a+v) = \varphi(a) + \varphi(v)$
$= \varphi(a) + \frac{\rho}{2\|u\|} \underbrace{\langle u | u \rangle}_{= \|u\|^2}$
$= \varphi(a) + \frac{\rho}{2}\|u\|$
$< \varphi(a)$



De même $\varphi(a-v) = \varphi(a) - \frac{\rho}{2}\|u\| > \varphi(a)$
Cela assure que φ ne sépare pas $\{a\}$ et C puisque $\sup\limits_{x \in C} \varphi(x) > \varphi(a)$ et $\inf\limits_{x \in C} \varphi(x) < \varphi(a)$ D'où $\boxed{\overset{a}{\Rightarrow}}$.

114.1

$\boxed{\overset{c}{\Rightarrow}}$ Si $a \in (\overline{C})^c$, on peut considérer x le projeté de a sur le convexe fermé non vide qu'est $\overline{C}$ (cf fiche 103).



On pose $u = a - x$. Réc. $u \neq 0$ car $\underset{\in \overline{C}}{x} \neq \underset{\notin \overline{C}}{a}$

Une caractérisation de ce projeté est $\forall c \in \overline{C}, \langle c-x | a-x \rangle \leq 0$
ie $\forall c \in \overline{C}, \langle c-x | u \rangle \leq 0$

On considère alors $\varphi = \langle u | \cdot \rangle$ et $H = \{ y \mid \varphi(y) = \varphi(x + \frac{u}{2}) \}$.

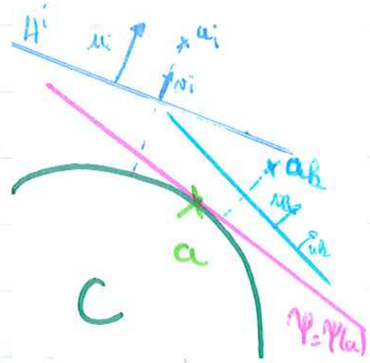
$$\varphi(a) = \varphi(x+u) = \varphi(x+\tfrac{u}{2}) + \varphi(\tfrac{u}{2}) = \varphi(x+\tfrac{u}{2}) + \frac{\|u\|^2}{2} > \varphi(x+\tfrac{u}{2})$$

et $\forall c \in \overline{C}$,
$$\varphi(c) = \varphi(c-x) + \varphi(x+\tfrac{u}{2}) - \varphi(\tfrac{u}{2})$$
$$= \underbrace{\langle c-x | u \rangle}_{\leq 0} + \varphi(x+\tfrac{u}{2}) - \frac{\|u\|^2}{2}$$
$$< \varphi(x+\tfrac{u}{2})$$

On a montré d'une part que H sépare $\overline{C}$ et $\{a\}$, et en écrivant que $\sup_{c \in C} \varphi(c) \leq \varphi(x+\frac{u}{2}) < \varphi(a)$ on a aussi la séparation <u>stricte</u>.

D'où $\boxed{\overset{c}{\Rightarrow}}$

$\boxed{\overset{b}{\Rightarrow}}$ Si $a \in \mathrm{Front}\, C$, il existe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in ((\overline{C})^c)^{\mathbb{N}}$ tq $a_n \to a$



D'après c, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $u_n \in H$ tel que la forme linéaire $\varphi_n = \langle u_n | \cdot \rangle$ sépare C de $\{a_n\}$, disons avec $\sup_{c \in C} \varphi_n(c) \leq \varphi_n(a_n)$.

Quitte à considérer $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{u_n}{\|u_n\|}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ on a une suite de vecteurs de la boule unité, et ainsi une suite bornée de forme linéaires $(\Psi_n) = (\langle v_n | \cdot \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ donc on peut en extraire $(\Psi_{\theta(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui cvg. faiblem^t vers Ψ.

Pour $c \in C$ on a $\Psi(c) = \lim_{n \to +\infty} \Psi_n(c) \leq \sup_{x \in C} \Psi_n(x) \leq \Psi_n(a_n)$

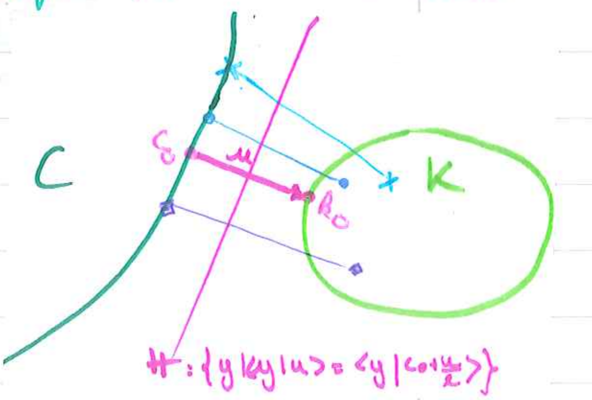
$$\leq \lim_{n \to +\infty} \Psi_n(a_n) = \Psi(a)$$ (cf 47.8 car H de Banach car Hilbert)

Donc Ψ sépare a et C au sens large, et $H = \{ y \mid \Psi(y) = \Psi(a) \}$ est un hyperplan d'appui de C en a. D'où $\boxed{\overset{b}{\Rightarrow}}$

Un singleton étant un convexe compact non vide, le $\Leftarrow$ est un cas particulier du résultat ci-dessous.

114.6. **Pté** Soit C un convexe fermé non vide de H.
Soit K ——— compact de H.
Si $C \cap K = \emptyset$ alors C et K sont fortement séparables

Preuve On va réutiliser la même construction d'un hyperplan de séparation à partir du vecteur entre un point de K et son projeté sur C mais comme ici K n'est pas un singleton, on va devoir choisir le bon point.



On note p_C la projection sur C.
D'après 103.3 p_C est 1-lip donc continue.
Donc $x \longmapsto \|x - p_C(x)\|$ est continue, en particulier elle atteint son inf sur K qui est compact, disons en k_0 et posons $c_0 = p_C(k_0)$.

Alors $\|k_0 - c_0\| = \inf\limits_{k \in K} \|k - p_C(k)\| = \inf\limits_{k \in K}\left(\inf\limits_{c \in C} \|k - c\|\right) = \inf\limits_{c \in C}\left(\inf\limits_{k \in K} \|k - c\|\right)$

$= \inf\limits_{c \in K} \|c - p_K(c)\| \leq \|c_0 - p_K(c_0)\| \underset{\text{car } k_0 \in K}{\leq} \|c_0 - k_0\|$

On en déduit que $p_K(c_0) = k_0$. On note $u = k_0 - c_0$

Ainsi $\forall c \in C \quad \langle c - c_0 \mid k_0 - c_0\rangle \leq 0 \quad$ soit $\langle c - c_0 \mid u\rangle \leq 0$
$\forall k \in K \quad \langle k - k_0 \mid \underbrace{c_0 - k_0}_{= -u}\rangle \leq 0 \quad$ soit $\langle k - k_0 \mid u\rangle \geq 0$

Donc $\forall c \in C \quad \langle c \mid u\rangle = \underbrace{\langle c - c_0 \mid u\rangle}_{\leq 0} + \langle c_0 + \frac{u}{2} \mid u\rangle - \underbrace{\langle \frac{u}{2} \mid u\rangle}_{= \varepsilon > 0} \leq \langle c_0 + \frac{u}{2} \mid u\rangle - \varepsilon$

et $\forall k \in K \quad \langle k \mid u\rangle = \underbrace{\langle k - k_0 \mid u\rangle}_{\geq 0} + \underbrace{\langle k_0 - \frac{u}{2} \mid u\rangle}_{= \langle c_0 + \frac{u}{2} \mid u\rangle} + \underbrace{\langle \frac{u}{2} \mid u\rangle}_{= \varepsilon} \geq \langle c_0 + \frac{u}{2} \mid u\rangle + \varepsilon$

Donc C et K sont fortement séparés par la forme linéaire $\langle \cdot \mid u\rangle$ et plus précisém^t par l'hyperplan $H = \{y \mid \langle y \mid u\rangle = \langle c_0 + \frac{u}{2} \mid u\rangle\}$