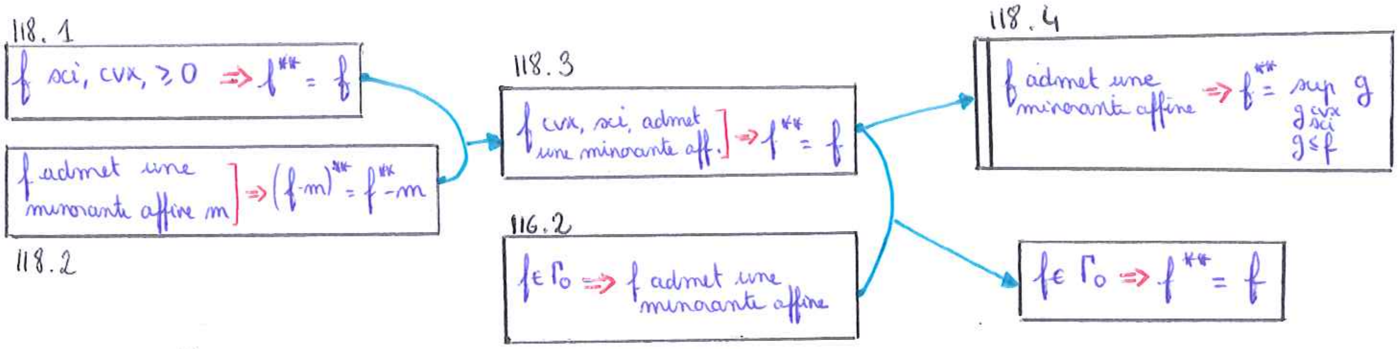
Cas d'égalité avec la biconjuguée et enveloppe convexe sci.

On se place ici dans un espace de Hilbert H, dont on note $\langle \,|\, \rangle$ le produit scalaire. On considère $f \in \mathcal{F}(H, \overline{\mathbb{R}})$.
Le but est de montrer que lorsque f^{**} n'est pas constante $= -\infty$ c'est l'enveloppe convexe sci de f. Pour cela on étudiera d'abord les cas d'égalité entre f^{**} et f.
Les résultats s'organisent selon le schéma suivant



118.1 **Pté** Si f est convexe, sci et positive, alors $f^{**} = f$

Preuve Supposons f propre.
On sait déjà que $f^{**} \leq f$ puisque c'est le sup des minorantes affines de f. On veut donc MQ $f \leq f^{**}$.
Par l'absurde supposons qu'il existe $x \in H$ tq $f^{**}(x) < f(x)$.
Eventuellement $f(x) = +\infty$ mais en tout cas $f^{**}(x) < +\infty$.
De plus f étant positive elle admet la fonction nulle comme minorante affine donc $f^{**} \neq -\infty$, en particulier $f^{**}(x) > -\infty$.
Ainsi $f^{**}(x) \in \mathbb{R}$ donc $(x, f^{**}(x)) \in H \times \mathbb{R} \setminus \text{épi}(f)$.
Par théorème de séparation, puisque épi(f) est convexe fermé non vide en tant qu'épigraphe d'une f cvx, sci, propre, on sait qu'il existe un hyperplan affine qui sépare $(x, f^{**}(x))$ de épi(f).
Donc il existe $u \in H$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall (y,t) \in \text{épi}(f), \quad \langle\langle (u,\lambda) \,|\, (x, f^{**}(x)) \rangle\rangle < \alpha \leq \langle\langle (u,\lambda) \,|\, (y,t) \rangle\rangle$$

soit $\forall (y,t) \in \text{épi}(f) \quad \langle u|x \rangle - \lambda f^{**}(x) < \alpha \leq \langle u|y \rangle - \lambda t$

Si $\lambda \leq 0$, pour $y \in dom(f)$ et $t \geq f(y)$ on a $\alpha \leq \langle u | y \rangle + \lambda t$.
Donc le terme de gauche est minoré indépendemᵗ de t pourtant il tend vers $-\infty$ quand $t \to +\infty$. ABSURDE.

Si $\lambda > 0$ On pose $\alpha' = \alpha/\lambda$ et $u' = \frac{1}{\lambda} u$ ainsi on a
$\forall (y,t) \in$ épi(f), $\langle u' | x \rangle + f^{**}(x) < \alpha' \leq \langle u' | y \rangle + t$.
En particulier pour $y \in dom(f)$ $\alpha' \leq \langle u' | y \rangle + f(y)$
donc $\forall y \in dom(f)$ $-\alpha' \geq \langle -u' | y \rangle - f(y)$
donc $f^*(-u') = \sup\limits_{y \in dom(f)} \langle -u' | y \rangle - f(y) \leq -\alpha'$

donc $-f^*(-u') \geq \alpha' > \langle u' | x \rangle + f^{**}(x)$

. $f^{**}(x) = \sup\limits_{v} \langle v | x \rangle - f^*(v)$
$\geq \langle -u' | x \rangle - f^*(-u')$

on aurait donc $f^{**}(x) > f^{**}(x)$ ABSURDE

Si $\lambda = 0$ on a $\forall y \in dom(f)$ $\langle u | x \rangle < \alpha \leq \langle u | y \rangle$.
⚠ On n'a pas supposé $x \in dom(f)$, on ne peut pas dire $\langle u | x \rangle < \langle u | x \rangle$...

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+*}\ f^*(-tu) = \sup_{y \in dom(f)} \langle -tu | y \rangle - f(y)$$
$$= \sup_{y \in dom(f)} \underbrace{-t}_{\leq 0} \underbrace{\langle u | y \rangle}_{\geq \alpha} - \underbrace{f(y)}_{\geq 0}$$

ici on utilise l'hypothèse $f \geq 0$

$$\leq \sup_{y \in dom(f)} -t\alpha$$
$$= -t\alpha$$

$$\text{Donc } f^{**}(x) = \sup_{v} \langle v | x \rangle - f^*(v)$$
$$\geq \sup_{t \in \mathbb{R}^{+*}} \langle -tu | x \rangle - f^*(-tu)$$
$$= \sup_{t \in \mathbb{R}^{+*}} -t \langle u | x \rangle + t\alpha$$
$$= \sup_{t \in \mathbb{R}^{+*}} t \underbrace{(\alpha - \langle u | x \rangle)}_{> 0}$$
$$= +\infty.$$

Or on avait justement choisi x tel que $f^{**}(x) < \infty$. ABSURDE

On en déduit que $f^{**} \geq f$ et par double inégalité $f^{**} = f$ □

(Si f n'est pas propre, $f \equiv +\infty$ (puisque $f \geq 0$) et alors $f^{**} = +\infty = f$ □.

118.1

118.2 **Pté** Si f admet une minorante affine m alors $(f-m)^{**} = f^{**} - m$.

Preuve Puisque m est affine il existe $u \in H$ et $c \in \mathbb{R}$ tq $m = \langle u | \cdot \rangle - c$.
On note alors $\tilde{f} = f - m$.

$$\forall v \in H \quad \tilde{f}^*(v) = \sup_{x \in H} \langle v | x \rangle - \tilde{f}(x)$$
$$= \sup_{x \in H} \langle v | x \rangle - f(x) + \langle u | x \rangle - c$$
$$= \left(\sup_{x \in H} \langle v + u | x \rangle - f(x)\right) - c$$
$$= f^*(v+u) - c.$$

$$\forall x \in H \quad \tilde{f}^{**}(x) = \sup_{v \in H} \langle v | x \rangle - \tilde{f}^*(v)$$
$$= \sup_{v \in H} \langle v | x \rangle - f^*(v+u) + c$$
$$= \sup_{v \in H} \langle v + u | x \rangle - f^*(v+u) - \langle u | x \rangle + c$$
$$= \sup_{v \in H} \left(\langle v | x \rangle - f^*(v)\right) - \langle u | x \rangle + c$$
$$= f^{**}(v) - m(x)$$

D'où $(f-m)^{**} = f^{**} - m$ □.

118.3 **Pté** Si f est convexe, s.c.i et admet une minorante affine alors $f^{**} = f$.

Preuve Notons m cette minorante affine.
$\tilde{f} := f - m$ est alors encore sci et convexe ; et puisque m minore f c'est même une f° positive.
D'après 118.1 on a donc $(f-m)^{**} = f - m$.
Or d'après 118.3 on a aussi $(f-m)^{**} = f^{**} - m$.
On en déduit $f = f^{**}$.

118.4 **Pté** Si f admet une minorante affine
alors f^{**} est l'enveloppe convexe, sci de f
ie $f^{**} = \sup\{g \mid g \leq f,\ g \text{ cvx, sci}\}$

<u>Preuve</u> On sait déjà que $f^{**} = \sup\limits_{\substack{g \leq f \\ g \text{ affine}}} g$.

Or puisque les f affines sont en particulier cvx et sci on a $f^{**} = \sup\limits_{\substack{g \leq f \\ g \text{ affine}}} g \leqslant \sup\limits_{\substack{g \leq f \\ g \text{ cvx, sci}}} g$.

Pour l'inégalité réciproque on note m une minorante affine de f

alors
$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{g \leq f \\ g \text{ cvx, sci}}} g &= \sup_{\substack{m \leq g \leq f \\ g \text{ cvx sci}}} g \\
&= \sup_{\substack{m \leq g \leq f \\ g \text{ cvx sci}}} g^{**} && \text{d'après 118.3} \\
&\leqslant \sup_{\substack{m \leq g \leq f \\ g \text{ cvx sci}}} f^{**} && \text{car } g \leq f \Rightarrow g^{**} \leq f^{**} \\
&= f^{**}
\end{aligned}$$

(les minorantes de g sont min de f leur sup est donc moindre que celui des minorantes de f)

<u>D'où $f^{**} = \sup\limits_{\substack{g \text{ cvx sci} \\ g \leq f}} g$ par double inégalité.</u>