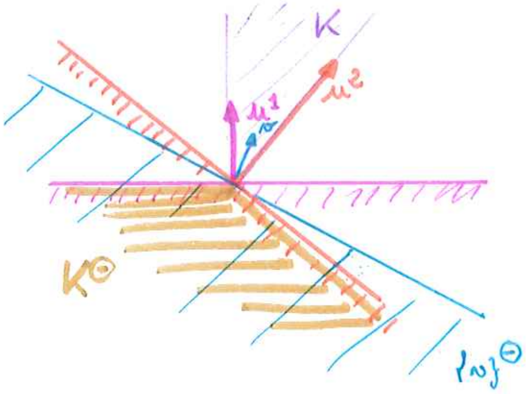
Lemme de Farkas

Cf p58 de Fundamentals of Convex Analysis de J-B Hiriart-Urruty et C. Lemaréchal éd. Springer

On se place dans $\mathcal{E}$ un espace euclidien.



122.1 **Pté** (lemme de Farkas)

Soit $(u^j)_{j\in[1..m]} \in \mathcal{E}^m$.
Soit $v \in \mathcal{E}$.
On pose $K = \sum_{j=1}^m \mathbb{R}^+ \times u^j$, alors

$$v\in K \iff \bigcap_{j=1}^m \{u^j\}^\ominus \subset \{v\}^\ominus$$

Preuve On commence par remarquer que K est un cône convexe car sa définition assure la stabilité par combinaison linéaire positive.

On peut aussi noter que $\bigcap_{j=1}^m \{u^j\}^\ominus = K^\ominus$.

En effet $\forall j\in[1..m]$, $u^j\in K$ donc $K^\ominus \subset \{u^j\}^\ominus$. d'où $K^\ominus \subset \bigcap_{j=1}^m \{u^j\}^\ominus$
Réciproquem^t si $x \in \bigcap_{j=1}^m \{u^j\}^\ominus$, alors pour $y\in K$, qui s'écrit sous la forme $y = \sum_{j=1}^m \lambda_j u^j$ où $(\lambda_j)_{j\in[1..m]} \in (\mathbb{R}^+)^m$, on a $x.y = \sum_{j=1}^m \underbrace{\lambda_j}_{\geq 0} \times \underbrace{(x.u^j)}_{\leq 0} \leq 0$
donc $x\in K^\ominus$ d'où $\bigcap_{j=1}^m \{u^j\}^\ominus = K^\ominus$

Cela donne le sens $\Rightarrow$: $v\in K \Rightarrow K^\ominus \subset \{v\}^\ominus$ (cf).

Pour montrer l'implication réciproque on montre que K est fermé, car si K est fermé c'est un cône convexe fermé non vide et alors $K^{\ominus\ominus} = K$, donc $K^\ominus \subset \{v\}^\ominus \Rightarrow v\in K^{\ominus\ominus} = K$.

On le montre par récurrence sur m.

- Si $m=1$, alors $K = \mathbb{R}^+ \times u^1$. On considère $(x^k)_{k\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x^∞. On peut la réécrire $(\lambda^k u^1)_{k\in\mathbb{N}}$ où $(\lambda^k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)$. Alors $x^\infty = \lim_{k\to+\infty} \lambda^k u^1 = (\lim_{k\to+\infty} \lambda^k) u^1$ et nécessairement $\lim_{k\to+\infty} \lambda^k \geq 0$ donc $x^\infty \in \mathbb{R}^+ u^1 = K$.
  Ainsi K est bien fermé.
- Si $m \geq 1$ et qu'on suppose la propriété vraie au rang m.

Si les $(u^j)_{j\in[1..m+1]}$ sont linéairement indépendants, on peut conclure sans utiliser l'hypothèse de récurrence : on considère $(x^k)_{k\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ qui cvg vers x^∞. On l'écrit $\left(\sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j^k u^j\right)_{k\in\mathbb{N}}$ où $\forall k\in\mathbb{N}, \forall j\in[1..m+1], \lambda_j^k \in \mathbb{R}^+$. Par liberté des u^j on est assuré que $\lim_{k\to+\infty}\left(\sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j^k u^j\right) = \sum_{j=1}^{m+1} \underbrace{\left(\lim_{k\to+\infty} \lambda_j^k\right)}_{\geq 0} u^j$ donc que $x^\infty \in K$, ainsi K est bien fermé.

Traitons maintenant le cas contraire, il existe alors $\beta \in \mathbb{R}^{m+1}\setminus\{0\}$ tel que $\sum_{j=1}^{m+1} \beta_j u^j = 0$. Quitte à changer β en $-\beta$ on suppose que β a au moins un coefficient < 0.

Considérons $x \in K$ qu'on écrit $x = \sum_{j=1}^{m+1} \alpha_j u^j$ où $\alpha \in (\mathbb{R}^+)^{m+1}$.

On pose alors $i(x) = \text{argmin}\left\{ \frac{-\alpha_j}{\beta_j} \mid j\in[1..m+1] \text{ et } \beta_j < 0 \right\}$

$t(x) = \min\{ \qquad\qquad\qquad\qquad \}$.

Puisque $\alpha \in (\mathbb{R}^+)^{m+1}$, $t(x) \geq 0$

On réécrit alors

$$\begin{aligned} x &= x + 0 \\ &= \sum_{j=1}^{m+1} \alpha_j u^j + t(x) \times \sum_{j=1}^{m+1} \beta_j u^j \\ &= \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\left[\alpha_j + t(x)\beta_j\right]}_{:=\alpha_j'} u^j \end{aligned}$$

On a $\alpha'_{i(x)} = \alpha_{i(x)} + t(x)\beta_{i(x)}$ or $t(x) = \frac{-\alpha_{i(x)}}{\beta_{i(x)}}$ donc $\alpha'_{i(x)} = 0$.

Pour $j \in [1..m+1]$, $\alpha_j' \geq 0 \iff \alpha_j + t(x)\beta_j \geq 0$

$\iff -\alpha_j \leq t(x)\beta_j$

Si $\beta_j \geq 0$, $t(x)\beta_j \geq 0 \geq -\alpha_j$ donc $\alpha_j' \geq 0$

Si $\beta_j < 0$, $t(x) \leq -\frac{\alpha_j}{\beta_j}$ par définition de $t(x)$,

donc $\beta_j t(x) \geq -\alpha_j$ et donc $\alpha_j' \geq 0$.

Donc $x \in \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i(x)}}^{m+1} \mathbb{R}^+ u^j := K_{i(x)}$. (clairem^t $\forall j\in[1..m+1]$ $K_j \subset K$ et on vient de MQ $K \subset \bigcup K_j$)

En procédant ainsi pour tout x on décompose K en $\bigcup_{j=1}^{m+1} K_j$, où K_j n'est engendré que par m vecteurs, donc fermé d'après l'hypothèse de récurrence.

On en déduit que K est fermé comme union d'un nombre fini de fermé, ce qui conclut le cas, la récurrence et la preuve!