Démonstration

> Soit $E = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,/\, f \text{ est continue bornée}\}$
> On pose $\| \ \| = \left(\begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ f \longmapsto \sup\{|f(t)| \,/\, t \in \mathbb{R}\}\end{array}\right)$
> 13.1 $(E, \| \ \|)$ est un espace de Banach.

- $\| \ \|$ est une norme sur E

- Montrons que E est complet.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. On veut MQ elle converge dans E.

<u>1) INTRODUIRE f LA LIMITE SIMPLE DE $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.</u>

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, p \geq q \geq N \Rightarrow \|f_p - f_q\| \leq \varepsilon$

soit $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, p \geq q \geq N \Rightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$

donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2\ p \geq q \geq N \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}\ |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$

donc $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2\ p \geq q \geq N \Rightarrow |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$

autrement dit pour tout $x \in \mathbb{R}$ $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Or il s'agit de suites réelles et $\mathbb{R}$ est complet, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$, c'est pourquoi on peut définir

$$f = \left(\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\end{array}\right)$$

<u>2) MONTRER LA CONVERGENCE UNIFORME VERS f.</u>

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2\ p \geq q \geq N \Rightarrow \|f_p - f_q\| \leq \varepsilon$.

Donc $\forall q \geq N, \forall p \geq q, \|f_p - f_q\| \leq \varepsilon$ soit $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$

donc $\forall x \in \mathbb{R}, \forall q \geq N, \forall p \geq q, |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$.

En passant à la limite sur $p \to +\infty$ on a $\forall x \in \mathbb{R}, \forall q \geq N\ |f(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$

ou $\forall q \geq N, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$ **donc** $\forall q \geq N, \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$

soit $\forall q \geq N\ \|f - f_q\| \leq \varepsilon$ donc $\|f - f_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

mieux vaut ne pas écrire ça tant qu'on n'a pas MQ $f \in E$

<u>3) MONTRER QUE f EST BORNÉE</u>

Puisque $\|f - f_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|f - f_N\| \leq 1$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}\ |f(x) - f_N(x)| \leq 1$ donc $\forall x \in \mathbb{R}\ |f(x)| \leq |f_N(x)| + 1$

or $f_N \in E$ donc $\forall x \in \mathbb{R}\ |f(x)| \leq \|f_N\| + 1$. d'où f est bornée.

4) MONTRER QUE f EST CONTINUE

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$.

Puisque $\|f_n - f\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|f_N - f\| \leq \varepsilon/3$.

$f_N \in E$ donc f_N est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier en x.

Donc il existe $\alpha_x \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}$, $|x-y| \leq \alpha_x \Rightarrow |f_N(x) - f_N(y)| \leq \varepsilon/3$.

Or $\forall y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |f(x)-f(y)| &= |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(y) + f_N(y) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| \\ &\leq 2\|f - f_N\| + |f_N(x) - f_N(y)| \end{aligned}$$

Donc $\forall y \in \mathbb{R}$, $|x-y| \leq \alpha_x \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 2 \times \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$.

On a donc montré que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \forall y \in \mathbb{R}, |x-y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$

autrement dit que f est continue.

5) CONCLUSION

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformement vers f qui est continue et bornée donc cette suite de Cauchy converge dans E.

E est donc complet.

Enfin un espace de Banach n'est rien d'autre qu'un EVN complet.

13.2 **Pté** Soit X un ensemble. Soit E un $\mathbb{K}$-EV, normé, complet

$(\mathcal{B}(X,E), \|\ \|_\infty)$ est un espace de Banach

$(\mathcal{C}_b(X,E), \|\ \|_\infty)$ est un espace de Banach.

où $\mathcal{B}(X,E) = \{ f \in \mathcal{F}(X,E) \mid f(X) \text{ est bornée} \}$

même démo.