Norme subordonnée

Pour E,F 2 EV on note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F. On note aussi $L(E)$ pour $L(E,E)$

14.1 **Pté** Soient $(E, \| \ \|_E)$ et $(F, \| \ \|_F)$ deux EVN.

$$|||\ ||| = \begin{pmatrix} \mathcal{L}(E,F) \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \end{pmatrix} \text{ est une norme.}$$

$\{x \in E \ / \ \|x\|_E = 1\}$

- Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Puisque u est linéaire la continuité de u équivaut au fait que $\|u\|_F$ soit bornée sur la sphère unité, le sup indiqué est bien réel. [Cf 11]
- Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ $|||u||| = 0 \Leftrightarrow \sup_{\mathcal{B}_E(0,1)} \|u(x)\|_F = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{B}_E(0,1), \|u(x)\|_F \leq 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{B}_E(0,1), \|u(x)\|_F = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{B}_E(0,1), u(x) = 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in E \quad u(x) = u\left(\|x\|_E \frac{x}{\|x\|_E}\right) = \|x\|_E \, u\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow u = 0$.

- Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ où $\mathbb{K}$ est le corps commutatif des scalaires.

$|||\lambda u||| = \sup_{\mathcal{B}_E(0,1)} \|\lambda u(x)\|_F = \sup_{x \in \mathcal{B}_E(0,1)} |\lambda| \, \|u(x)\|_F = |\lambda| \sup_{\mathcal{B}_E(0,1)} \|u(x)\|_F = |\lambda| \, |||u|||$

- Soit $(u,v) \in \mathcal{L}(E,F)^2$ $\quad |||u+v||| = \sup_{x \in \mathcal{B}_E(0,1)} \|u(x) + v(x)\|_F$

Or $\| \ \|_F$ vérifie l'inégalité triangulaire donc $\forall x \ \mathcal{B}_E(0,1)$ $\|u(x) + v(x)\|_F \leq \|u(x)\|_F + \|v(x)\|_F$

donc $|||u+v||| \leq \sup_{x \in \mathcal{B}_E(0,1)} (\|u(x)\|_F + \|v(x)\|_F) \leq \sup_{x \in \mathcal{B}_E(0,1)} (\|u(x)\|) + \sup_{x \in \mathcal{B}_E(0,1)} (\|v(x)\|_F)$

soit $|||u+v||| \leq |||u||| + |||v|||$.

Donc $|||\ |||$ est définie (condi° de séparation), homogène et vérifie l'inégalité triangulaire, c'est donc bien une norme.

14.2 **Déf** Sous ces notations $|||\ |||$ est la norme subordonnée (à $\| \ \|_E$ et $\| \ \|_F$).

14.3 **Pté** Sous ces notations et pour $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

$|||u|||$ est la plus petite constante c telle que $\forall x \in E \ \ \|u(x)\|_F \leq c \|x\|_E$

$\forall x \in E \ \ \|u(x)\|_F \leq c \|x\|_E \Leftrightarrow \forall x \in E \setminus \{0\} \ \ \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq c \Leftrightarrow \forall x \in E \setminus \{0\} \ \ \left\|u\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right)\right\|_F \leq c$

$\Leftrightarrow \forall y \in \mathcal{B}_E(0,1) \ \ \|u(y)\|_F \leq c$

$\Leftrightarrow c$ est un majorant de $\{\|u(y)\|_F \ / \ y \in E, \|y\|_E = 1\}$

On conclut grâce à la caractérisation de la borne sup comme le plus petit des majorants.

14.4 **Pté** Soient $(E, \|\ \|_E)$, $(F, \|\ \|_F)$ et $(G, \|\ \|_G)$ trois EVN.

$\forall u \in \mathcal{L}(F,G), \forall v \in \mathcal{L}(E,F)$, $|||u \circ v||| \le |||u|||\ |||v|||$

⚠ il faut lire $|||u\circ v|||_{\mathcal{L}(E,G)} \le |||u|||_{\mathcal{L}(F,G)} \times |||v|||_{\mathcal{L}(E,F)}$

Soit $x \in E$. $\|u \circ v(x)\|_G = \|u(v(x))\|_G \le |||u|||\ \|v(x)\|_F \le |||u|||\ |||v|||\ \|x\|_E$

Donc $\sup_{x \in B_E(0,1)} (\|u\circ v(x)\|_G) \le |||u|||\ |||v||| \times 1$ d'où $|||u\circ v||| \le |||u|||\ |||v|||$.

14.5 **Pté** Soient $(E, \|\ \|)$ et $(F, \|\ \|_F)$ deux EV·N.

Si $(F, \|\ \|_F)$ est complet alors $(\mathcal{L}(E,F), |||\ |||)$ est aussi complet.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}(E,F)^{\mathbb{N}}$ telle que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit de Cauchy.

1) INTRODUIRE u LA LIMITE SIMPLE

$\forall x \in B_E(0,1), \forall n \in \mathbb{N}\ \|u_n(x)\|_F \le |||u_n|||$ et m̂ $\forall x \in B_E(0,1), \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2\ \|(u_p - u_q)(x)\|_F \le |||u_p - u_q|||$

Donc $\forall x \in B_E(0,1)\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, p \ge q \ge N \Rightarrow \|u_p(x) - u_q(x)\|_F \le \varepsilon$.

Or $\forall x \in B_E(0,1)$ $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'élm^t de F qui est complet donc le fait qu'elle soit de Cauchy implique qu'elle cv*: on peut donc définir (*dans F)

$u \left(\begin{array}{l} E \to F \\ x \mapsto \lim_{n\to+\infty} \|x\|_E\, u_n\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right) \end{array} \text{ si } x \neq 0,\ 0 \text{ sinon} \right)$.

2) MONTRER QUE $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CONVERGE UNIFORMEMENT VERS u

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall q \ge N, \forall p \ge q, |||u_p - u_q||| \le \varepsilon$

Donc $\forall q \ge N\ \forall p \ge q, \forall x \in B_E(0,1), \|u_p(x) - u_q(x)\|_F \le \varepsilon$

donc $\forall x \in B_E(0,1), \forall q \ge N, \forall p \ge q\ \|u_p(x) - u_q(x)\|_F \le \varepsilon$

Donc en passant à la limite sur $p \to +\infty$ $\forall x \in B_E(0,1), \forall q \ge N, \|u(x) - u_q(x)\| \le \varepsilon$

donc $\forall q \ge N, |||u - u_q||| \le \varepsilon$ d'où la cv uniforme.

3) MONTRER QUE u EST LINÉAIRE

Soit $(x,y,\lambda) \in E^2 \times \mathbb{K}$. $u(x+\lambda y) = \lim_{n\to+\infty} \|x+\lambda y\|\, u_n\left(\frac{x+\lambda y}{\|x+\lambda y\|}\right) = \lim_{n\to+\infty} (u_n(x) + \lambda u_n(y))$

$= \lim_{n\to+\infty} u_n(x) + \lambda \lim_{n\to+\infty} u_n(y) = u(x) + \lambda u(y)$.

4) MONTRER QUE u EST CONTINUE

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|||u - u_N||| \le \varepsilon/2$. puisque $|||u_n - u||| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Puisque $u_N \in \mathcal{L}(E,F)$ elle est continue en 0, il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que

$\forall y \in E, \|y\|_E \le \alpha \Rightarrow \|u_N(y)\| \le \varepsilon/2$. Donc $\forall y \in E, \|y\|_E \le \alpha \Rightarrow \|u(y)\| \le \|u(y) - u_N(y)\| + \|u(y)\|$

$\le |||u - u_N||| + \|u(y)\|$

$\le \varepsilon/2 + \varepsilon/2$

$= \varepsilon$

donc u est bien continue en 0.

Puisqu'elle est linéaire, cela suffit à MQ elle est continue.

cf 11.

14.6 **Cor.** Dans ce cas $(\mathcal{L}(E,F), +, \cdot, \circ, |||\ |||)$ est une algèbre de Banach.