Différentielle

- Soient E, F, G trois EV de dimension finie.
  Soit U un ouvert de E. Soit $f \in \mathcal{F}(U,F)$.
  Soit V un ouvert de F. Soit $g \in \mathcal{F}(V,G)$.
  Soit $a \in U$.

17.1 **Déf** f est differentiable en a $\iff$ $\exists L \in \mathcal{L}(E,F), \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)-L(x-a)}{\|x-a\|} = 0$

$\iff \exists L \in \mathcal{L}(E,F)\ f(x) - f(a) - L(x-a) = o(\|x-a\|)$

17.2 **Pté / Déf** Si f est differentiable en a alors L est unique ; on l'appelle differentielle de f en a qu'on note $df(a)$.

Soient L_1 et L_2 deux applications linéaires candidate.
Pour $k=1$ ou 2 on a alors $0 = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)-L_k(x-a)}{\|x-a\|}$. Soit $u \in E \setminus \{0\}$
on a pour $k=1$ ou 2 $0 = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{f(a+\varepsilon u) - f(a) - L_k(a+\varepsilon u - a)}{\|a+\varepsilon u - a\|} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{f(a+\varepsilon u)-f(a)-L_k(\varepsilon u)}{\|\varepsilon u\|}$
Donc en retranchant l'égalité pour $k=2$ à celle pour $k=1$ on obtient
$0 = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left(\dfrac{f(a+\varepsilon u) - f(a) - L_1(\varepsilon u) - f(a+\varepsilon u) + f(a) + L_2(\varepsilon u)}{\|\varepsilon u\|} \right) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{L_2(\varepsilon u) - L_1(\varepsilon u)}{\|\varepsilon u\|}$
Or $\forall \varepsilon > 0$ on a $\dfrac{L_2(\varepsilon u) - L_1(\varepsilon u)}{\|\varepsilon u\|} = \dfrac{\varepsilon L_2(u) - \varepsilon L_1(u)}{|\varepsilon|\ \|u\|} = \dfrac{L_2(u) - L_1(u)}{\|u\|}$ (indép de ε !)
d'où $0 = \dfrac{L_2(u) - L_1(u)}{\|u\|}$. Et puisque c'est vrai $\forall u \in E \setminus \{0\}$ $L_1 = L_2$ ($L_1(0) = L_2(0) = 0$ par linéarité)

17.3 **Pté** Si f est différentiable en a alors elle est continue en a

$a \in U$ qui est un ouvert donc il existe $r_1 \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\mathcal{B}(a, r_1) \subset U$. Par définition de df_a
le quotient $\dfrac{\|f(x) - f(a) - df_a(x-a)\|}{\|x-a\|}$ tend vers 0 quand x tend vers a ; il existe donc
$r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $r < r_1$ tel que ce quotient est inferieur à 1 autrement dit
$\forall x \in \mathcal{B}(a,r)\ \|f(x) - f(a) - df_a(x-a)\| \leq \|x-a\|$.
De plus df_a est linéaire en dimension finie donc $\forall u \in E\ \|df_a(u)\| \leq |||df_a|||\ \|u\|$.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. Soit $x \in \mathcal{B}\left(a, \min\left(r, \frac{\varepsilon}{|||L|||+1}\right)\right)$
$\|f(x) - f(a)\| = \|f(x) - f(a) - df_a(x-a) + df_a(x-a)\| \leq \|f(x) - f(a) - df_a(x-a)\| + \|df_a(x-a)\|$
$\leq \|x-a\| + |||L|||\ \|x-a\| = (|||L|||+1)\ \|x-a\| \leq \varepsilon$
D'où la continuité de f en a.

17.4 **Pté** f différentiable en a, $f(a) \subset V$, g différentiable en $f(a)$ $\Longrightarrow$ $\begin{cases} \text{-}g\circ f \text{ est définie au voisinage de } a \\ g\circ f \text{ est différentiable en } a \\ d_{g\circ f}(a) = d_g(f(a)) \circ d_f(a) \end{cases}$

$f(a) \subset V$ or V est ouvert donc il existe $r_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\mathcal{B}(f(a), r_0) \subset V$.
Puisque f est diff en a, f est cont en a (cf 17.3) donc il existe $r \in \mathbb{R}^{+*}$ tq $f(\mathcal{B}(a,r)) \subset \mathcal{B}(f(a), r_0) \subset V$
Sur $\mathcal{B}(a,r)$ l'application $g\circ f$ a un sens.
Notons $L_1 = d_f(a)$; $C_1 = |||L_1|||$; $L_2 = d_g(f(a))$; C_2 $|||L_2|||$.
Pour $u \in U$ on note $R_1(u) = f(u) - f(a) - L_1(u-a)$ et pour $v \in V$ $R_2(v) = g(v) - g(f(a)) - L_2(v - f(a))$.
D'après 17.3 il existe $r_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $r_0 < r$ et $\forall x \in \mathcal{B}(a, r_0)$ $\|f(x) - f(a)\| \leq (1+C_1)\|x-a\|$.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. Par définition des différentielles L_1 et L_2 il existe $r_1 \in \mathbb{R}^{+*}$ tq $r_1 < r_0$
et $\forall u \in \mathcal{B}(a, r_1)$ $\|R_1(u)\| \leq \frac{\varepsilon}{1+C_1+C_2}\|u-a\|$
$\forall v \in \mathcal{B}(f(a), r_1)$ $\|R_2(v)\| \leq \frac{\varepsilon}{1+C_1+C_2}\|v - f(a)\|$.
Soit $x \in \mathcal{B}(a, \frac{r_1}{1+C_1}) \subset \mathcal{B}(a, r_1)$. On pose $y = f(x)$.
$\|x-a\| \leq r_1$ donc $\|R_1(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{1+C_1+C_2}$, car $\|x-a\| \leq r_1 \leq r_0$.
$\|y - f(a)\| = \|f(x) - f(a)\| \leq (1+C_1)\|x-a\| \leq (1+C_1) \times \frac{r_1}{1+C_1} \leq r_1$ donc $\|R_2(y)\| \leq \frac{\varepsilon}{1+C_1+C_2}\|y-f(a)\|$
$g\circ f(x) = g(y) = g(f(a)) + L_2(y - f(a)) + R_2(y)$
or $y - f(a) = f(x) - f(a) = R_1(x) + L_1(x-a)$
d'où $g\circ f(x) = g\circ f(a) + L_2(R_1(x)) + L_2 \circ L_1(x-a) + R_2(y)$
donc $\|g\circ f(x) - g\circ f(a) - L_2\circ L_1(x-a)\| \leq \|L_2(R_1(x))\| + \|R_2(y)\|$

$$\leq C_2\|R_1(x)\| + \frac{\varepsilon}{1+C_1+C_2}\|y - f(a)\|$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{1+C_1+C_2}\left[C_2\|x-a\| + (1+C_1)\|x-a\|\right]$$
$$\leq \varepsilon \|x-a\|$$

Soit $\frac{\|g\circ f(x) - g\circ f(a) - L_2\circ L_1(x-a)\|}{\|x-a\|} \leq \varepsilon$ d'où $\lim\limits_{x\to a} \frac{\|g\circ f(x) - g\circ f(a) - L_2\circ L_1(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0$

Or $L_2 \circ L_1$ est linéaire donc c'est bien la différentielle de $g\circ f$ en a.

17.5 **Pté** f est différentiable en a, f est bijective de U ds V de réc f^{-1}, f^{-1} est différentiable en $f(a)$ $\Longrightarrow$ $d_{f^{-1}}(f(a)) = (d_f(a))^{-1}$

$\frac{\|id(x) - id(a) - id(x-a)\|}{\|x-a\|} = \frac{\|x-a-(x-a)\|}{\|x-a\|} = \frac{0}{\|x-a\|} \xrightarrow[x\to a]{} 0$ donc $d_{id}(a) = id_E$
Soit $id = d_{f^{-1}\circ f}(a) = d_{f^{-1}}(f(a)) \circ d_f(a)$. Or $d_{id}(f(a)) = id_F$ donc
$id = d_{f\circ f^{-1}}(f(a)) = d_f(f^{-1}(f(a)) \circ d_{f^{-1}}(f(a)) = d_f(a) \circ d_{f^{-1}}(f(a))$ d'où le résultat.

Differentielle (suite)

17.6 **Déf** f est C^1 sur $U \Leftrightarrow \forall x \in U$ f est différentiable en x

$\Leftrightarrow$ $f \in C^1(U,F)$ et $df \begin{pmatrix} U \to \mathcal{L}(E,F) \\ x \mapsto df_x \end{pmatrix}$ est continue sur U

17.7 **Pté**

f est C^1 sur U
f est bijective de U dans V
$\forall y \in V$ f^{-1} est differentiable en y

$\Rightarrow f^{-1}$ est aussi C^1.

En tout point de V f^{-1} est differentiable donc continue : ainsi $f^{-1} \in C^0(V,U)$.
D'après 17.5 $\forall z \in V$ $\quad df^{-1}(z) = df(f^{-1}(z))^{-1}$.
En notant $\Gamma = \begin{pmatrix} \mathcal{L}(E,F) \text{ bij} \to \mathcal{L}(E,F) \text{ bij} \\ u \longmapsto u^{-1} \end{pmatrix}$ continue d'après 15.4 on a donc $d(f^{-1}) = \Gamma \circ df \circ f^{-1}$. En tant que composée de trois applications continues df^{-1} est aussi continue. d'où $f^{-1} \in C^1(V,U)$.