Modèle polynomial

Cadre pratique. On pense qu'une quantité X dépend de manière polynomiale d'une quantité Y. On mesure alors n fois la valeur de X et la valeur de Y correspondant.
Ici aussi on a un nuage de points (Y_i, X_i) mais on ne cherche pas une droite mais un polynôme pour l'approcher.

26.1 **Modèle** $\boxed{\tilde{X} = [\mathbb{1} \ Y \ Y^2 \dots Y^{p-1}]\,\Theta \quad \text{où} \quad Y^k = \begin{pmatrix} y_1{}^k \\ \vdots \\ y_n{}^k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ et } \Theta = (\theta_i)_{i\in[1..p]} \in \mathbb{R}^p}$

26.2 **Régularité** $\tilde{X} = [\mathbb{1} \ Y \ Y^2 \dots Y^{p-1}]$ est régulier $\Leftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } (k_i)_{i\in[1..p]} \in [1..n]^p \text{ telle que} \\ (Y_{k_i})_{i\in[1..p]} \text{ est une famille de réels 2 à 2 distincts} \end{array} \right.$

Notons $A = [\mathbb{1} \ Y \ Y^2 \dots Y^{p-1}] \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

- Si il existe une famille de p coeff 2 à 2 distincts qu'on note $(a_i)_{i\in[1..p]}$ il existe un changem^t de base dans lequel A s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & & a_1^{p-1} \\ | & a_2 & a_2^2 & & a_2^{p-1} \\ | & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_p & a_p^2 & & a_p^{p-1} \\ 1 & * & * & & * \\ 1 & & & & \end{pmatrix}$ B (en permutant les lignes)
Alors B est une matrice de Vandermonde de determinant non nul car $\det B = \prod_{\substack{i,j\in[1..p] \\ i<j}} a_j - a_i$. Donc les colonnes de B sont independantes.
A fortiori les colonnes de A ds cette base sont de rang p et donc les colonnes de A sont de rg p et le modèle est régulier.

- A l'inverse s'il n'existe pas p coefficients 2 à 2 distincts, c'est qu'il y a au plus $p-1$ coefficients distincts (coeff du vect Y).
Notons les $(a_k)_{k\in[1..p-1]}$. Il se peut qu'il y ait des redondances ds cette famille ($i\neq j$ mais $a_i = a_j$) mais on est sûr que $\{a_k \,/\, k\in[1..p-1]\} = \{Y_i \,/\, i\in[1..n]\}$
On introduit P le polynôme $P(X) = \prod_{k=1}^{p-1} (X - a_k)$. En le développant il existe $(\lambda_i)_{i\in[0..p-1]}$ tel que $P(X) = \sum_{j=0}^{p-1} \lambda_j X^j$. $(\lambda_k)_{k\in[0..p-1]} \neq 0_{\mathbb{R}^p}$ car $P \neq$ polynôme nul. Alors $\sum_{i=1}^{p} \lambda_{i-1} A_i = \sum_{j=0}^{p-1} \lambda_j Y^j$
Or $\forall i\in[1..n]$ $\sum_{j=0}^{p-1} \lambda_j (Y_i)^j = P(Y_i)$ or il existe $k\in[1..p-1]$ tel que $Y_j = a_k$
donc $\sum_{j=0}^{p-1} \lambda_j (Y_i)^j = P(a_k) = 0$ car a_k est racine de P. d'où $\sum_{i=1}^{p} \lambda_{i-1} A_i = 0_{\mathbb{R}^n}$.
Une CL non nulle de colonne de A est nulle $\Rightarrow$ $rg(A) < p$ $\Rightarrow$ modèle non régulier