Consistance des schémas numériques :

Pté Si $\forall y$ solution de (P), $\exists C \in \mathbb{R}, \forall h \in [0,H], \forall n \in [q..N-1]$ $\|\varepsilon_{n,h}(y)\| \le C h^{\theta+1}$

Alors le schéma est consistant d'ordre θ pour (P).

__Démonstration:__ Soit y une solution de (P). On suppose qu'il existe C comme proposé.

$$\sum_{n=q}^{N-1} \|\varepsilon_{n,h}(y)\| \le \sum_{n=q}^{N-1} C h^{\theta+1} = (N-q) C h^{\theta+1} \le C \times (Nh) \times h^{\theta} \le C' h^{\theta}$$

où $C' = CT$ indépendant de h. d'où la consistance d'ordre θ.

Pté Pour un schéma numérique explicite à un pas ($p=0$, $q=1$)

Le schéma est consistant pour (P) $\Longleftrightarrow \begin{cases} \Phi \in C^0([T_1,T_2] \times \mathbb{R}^m \times [0,H], \mathbb{R}^m) \\ \forall t \in [T_1,T_2], \forall u \in \mathbb{R}^m \ \Phi(t,u,0) = f(t,u) \end{cases}$

Preuve de "$\Leftarrow$". On suppose donc que $\Phi(\cdot,\cdot,0) = f(\cdot,\cdot)$

Soit y une solution de (P). Soit $h \in [0,H]$ et $N = \lfloor \frac{T}{h} \rfloor + 1$.

$\forall n \in [0..N-1]$ $y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(u)\,du$.

On introduit le changement de variable $s = \frac{u-t_n}{h}$. | $u = hs + t_n$ $du = h\,ds$; $u = t_n \Leftrightarrow s = 0$; $u = t_{n+1} = t_n + h \Leftrightarrow s = 1$

donc $\forall n \in [0..N-1]$ $y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_0^1 y'(hs+t_n) h\,ds = h\int_0^1 f(hs+t_n, y(hs+t_n))\,ds = h\int_0^1 \Phi(hs+t_n, y(hs+t_n), 0)\,ds$

donc $\forall h \in [0,H], \forall n \in [0..\lfloor T/h \rfloor]$, $\varepsilon_{n,h}(y) = h\int_0^1 \Phi(hs+t_n, y(hs+t_n), 0)\,ds - h\,\Phi(t_n, y(t_n), h) \times \int_0^1 ds$

donc $\|\varepsilon_{n,h}(y)\| \le |h| \int_0^1 \|\Phi(hs+t_n, y(hs+t_n), 0) - \Phi(t_n, y(t_n), h)\|\,ds$

On pose $K = \{(t,s,h) \in [T_1,T_2] \times [0,1] \times [0,H] \mid t+h \le T\}$.

$$G = \begin{pmatrix} K \to \mathbb{R}^+ \\ (t,s,h) \mapsto \|\Phi(hs+t, y(hs+t), 0) - \Phi(t, y(t), h)\| \end{pmatrix}$$

Puisque Φ est continue et $\|\ \|$ aussi G est continue sur K par composition.

De plus K est un fermé de $[T_1,T_2] \times [0,1] \times [0,H]$ qui est lui même compact en tant que fermé borné de $\mathbb{R}^3$. Donc K est un compact et alors G est en fait uniformément continue sur K.

Donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \delta \in \mathbb{R}^{+*}, \forall (t,s,h) \in K, |h-0| \le \delta \Rightarrow \|G(t,s,h) - G(t,s,0)\| \le \varepsilon/N$.

Or $\forall (t,s) \in [T_1,T_2] \times [0,1]$ $G(t,s,0) = \|\Phi(0+t, y(0+t), 0) - \Phi(t, y(t), 0)\| = 0$

donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists h_0 \in \mathbb{R}^{+*}, \forall (t,s,h) \in K, h \le h_0 \Rightarrow G(t,s,h) \le \varepsilon/T$

donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists h_0 \in \mathbb{R}^{+*}, \forall h \le h_0, \forall n \in [0..\lfloor T/h \rfloor]$ $\|\varepsilon_{n,h}(y)\| \le |h| \int_0^1 \frac{\varepsilon}{T}\,ds \le h\,\varepsilon/T$.

donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists h_0 \in \mathbb{R}^{+*}, \forall h \le h_0, \sum_{n=0}^{\lfloor T/h \rfloor} \|\varepsilon_{n,h}(y)\| \le \lfloor T/h \rfloor \times \frac{h}{T} \times \varepsilon \le \varepsilon$

d'où $\lim_{h \to 0} \sum_{n=0}^{N-1 = \lfloor T/h \rfloor} \|\varepsilon_{n,h}(y)\| = 0$ et ce pour toute solution y de (P) d'où la consistance.