Morphisme du corps $\mathbb{R}$

Pté Le seul morphisme de corps de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est $id_{\mathbb{R}}$.

démonstration. Si φ est un morphisme de corps de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

- $\varphi(0) = 0$
- $\varphi(1) = 1$
- $\forall n \in \mathbb{N}$ $\varphi(n) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} 1\right) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(1) = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$
- $\forall z \in \mathbb{Z}$. Si $z \in \mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$ $\varphi(z) = z$

  Si $z \in \mathbb{Z}^-$ alors $\varphi(-z) \in \mathbb{N}$, donc $\varphi(-z) = -z$

  Or $0 = \varphi(0) = \varphi(z-z) = \varphi(z) + \varphi(-z)$ donc $\varphi(z) = -\varphi(-z) = -(-z) = z$
- $\forall a \in \mathbb{Q}$, $\exists (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tq $a = p/q$

  $q \times \varphi(p/q) = \varphi(q \times p/q) = \varphi(p) = p$ d'où $\varphi(p/q) = p/q$
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $x > y \Rightarrow \exists z > 0 / x - y = z^2 \Rightarrow \varphi(x-y) = \varphi(z^2) = \varphi(z)^2 > 0$

  donc $\varphi(x) = \varphi(x-y+y) = \underbrace{\varphi(x-y)}_{>0} + \varphi(y)$ donc $\varphi(x) > \varphi(y)$

Donc φ est strictement croissante.

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ tel que $a_n \searrow x$ et $b_n \nearrow x$.

(En effet $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\exists a_n \in]x, x+1/n[$, $\exists b_n \in]x-1/n, x[\cap \mathbb{Q}$. car $\mathbb{Q}$ est dense ds $\mathbb{R}$).

Ainsi $([b_n, a_n])_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fermés emboîtés, dont la longueur tend vers 0, d'après le théorème des fermés emboîtés (cf 33), leur intersection est réduite à un point.

Or $\forall n \in \mathbb{N}$ $x \in [b_n, a_n]$ donc $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [b_n, a_n] = \{x\}$.

De plus, par croissance de φ, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\varphi(b_n) \leq \varphi(x) \leq \varphi(a_n)$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \in \mathbb{Q}$ donc $\varphi(a_n) = a_n$ et $b_n \in \mathbb{Q}$ donc $\varphi(b_n) = b_n$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $\varphi(x) \in [b_n, a_n]$ d'où $\varphi(x) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [b_n, a_n] = \{x\}$

Soit $\varphi(x) = x$.

Donc φ est l'identité sur $\mathbb{R}$!