Théorème fondamental de la géométrie affine

> Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines réels de dimension finie $n \geq 2$
> Soit $f \in \mathcal{F}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ une bijection de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$.
> f est affine $\Leftrightarrow$ f conserve l'alignement.

Toute fonction affine conserve l'alignement : Si $(A,B,C) \in \mathcal{E}^3$ tq il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tq $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{BC}$ alors $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \vec{f}(\lambda \overrightarrow{BC}) = \lambda \vec{f}(\overrightarrow{BC}) = \lambda \overrightarrow{f(B)f(C)}$ soit $f(A)$, $f(B)$ et $f(C)$ alignés.
La partie intéressante est donc la réciproque, on suppose donc que f conserve l'alignement.

1) MONTRER QUE $\forall m \in \mathbb{N}\ \forall (P_i)_{i\in[0..m]} \in \mathcal{E}^{m+1}\ f(\mathrm{Aff}\langle\{P_i \mid i \in [0..m]\}\rangle) \subset \mathrm{Aff}\langle\{f(P_i) \mid i \in [0..m]\}\rangle$

On note $\forall m \in \mathbb{N}$ H_m l'hypothèse $\forall (P_i)_{i\in[0..m]} \in \mathcal{E}^{m+1}$, $f(\mathrm{Aff}\langle\{P_i \mid i\in[0..m]\}\rangle) = \mathrm{Aff}\langle\{f(P_i) \mid i \in [0..m]\}\rangle$
H_2 équivaut à la conservation de l'alignem^t par f.
Soit $m \in \mathbb{N}^*\setminus\{1\}$. On suppose H_m vraie. Soit $(P_i)_{i\in[0..m+1]} \in \mathcal{E}^{m+2}$.
Soit $M \in f(\langle \mathrm{Aff}\{P_i \mid i \in [0..m+1]\}\rangle)$. Il existe donc $N \in \mathrm{Aff}\{P_i \mid i\in[0..m+1]\}$ tel que $f(N) = M$ et il existe alors aussi $(\lambda_i)_{i\in[0..m+1]} \in \mathbb{R}^{m+2}$ tel que $N = \sum_{i=0}^{m+1} \lambda_i P_i$ où $\sum_{i=0}^{m+1} \lambda_i \neq 0$.
Si $\forall i_0 \in [0..m+1]$ $\sum_{\substack{i=0 \\ i\neq i_0}}^{m+1} \lambda_i = 0$ alors $(m+1) \times \sum_{i=0}^{m+1} \lambda_i = 0$ imp ! Donc il existe $i_0 \in [0..m+1]$ tel que $\sum_{\substack{i=0 \\ i\neq i_0}}^{m+1} \lambda_i \neq 0$. Alors par associativité du barycentre on peut écrire $N = \lambda_{i_0} P_{i_0} + \sum_{\substack{i=0 \\ i\neq i_0}}^{m+1} \lambda_i P_i$
On pose, pour plus de clarté, $P = P_{i_0}$ et $Q = \sum_{\substack{i=0 \\ i\neq i_0}}^{m+1} \lambda_i P_i$. $N = \mathrm{bar}((P, \lambda_{i_0}), (Q, 1)) \in (P,Q)$
donc $M = f(N) \overset{H_2}{\in} (f(P), f(Q)) = \mathrm{Aff}\langle f(P), f(Q)\rangle$. or $f(P) \equiv f(P_{i_0}) \in \mathrm{Aff}\langle\{f(P_i)_{i\in[0..m+1]}\}\rangle$
et $f(Q) = f(\sum_{\substack{i=0 \\ i\neq i_0}}^{m+1} \lambda_i P_i) \in f(\mathrm{Aff}\langle\underbrace{\{P_i \mid i \in [0..m+1]_{\setminus i_0}\}}_{\text{ensemble de } m \text{ pts}}\rangle) \underset{\text{par } H_m}{\subset} \mathrm{Aff}\langle\{f(P_i) \mid i\in[0..m+1]_{\setminus i_0}\}\rangle \subset \mathrm{Aff}\langle\{f(P_i) \mid i \in [0..m+1]\}\rangle$
d'où $M \in \mathrm{Aff}\langle\{f(P_i) \mid i\in[0..m+1]\}\rangle$.
On a donc H_{m+1}. Par récurrence $\forall m \in \mathbb{N}$. H_m.

2) MONTRER QUE LES IMAGES DE POINTS AFFINEMENT INDÉPENDANTS LE SONT AUSSI

a) Pour une famille de n points : Soit $(P_i)_{i\in[1..n]}$ un repère de $\mathcal{E}$.
D'après 1) $f(\mathrm{Aff}\langle\{P_i \mid i\in[1..n]\}\rangle) \subset \mathrm{Aff}\langle\{f(P_i) \mid i\in[1..n]\}\rangle$. Or $f(\mathrm{Aff}\langle\{P_i \mid i\in[1..n]\}\rangle) = f(\mathcal{E}) = \mathcal{F}$ donc $\mathcal{F} \subset \mathrm{Aff}\langle\{f(P_i) \mid i \in [1..n]\}\rangle$, autrement dit $(f(P_i))_{i\in[1..n]}$ est une famille "affinem^t" génératrice de $\mathcal{F}$ et puisque son cardinal est $n = \dim(\mathcal{E}) = \dim(\mathcal{F})$ elle est affinement libre.
b) Pour une famille de $p \leq n$ points Soit $(P_i)_{i\in[1..p]}$ une famille de p points affinem^t indép. de $\mathcal{E}$.
Par extension du théorème de la base incomplète on peut la compléter en $(P_i)_{i\in[1..n]}$ un repère

de $\mathcal{F}$. Alors, d'après le a), $(f(P_i))_{i\in[1..n]}$ sera affinement libre et $(f(P_i))_{i\in[1..p]}$ en tant qu'une de ses sous-familles le sera aussi.

3) MONTRER QUE L'IMAGE D'UN SEA DE DIM d EST UN SEA DE DIM d

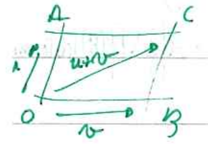
Soit $d\in[1..n]$. Soit $\mathcal{S}$ un SEA de $\mathcal{E}$ de dimension d. Il existe alors $(P_i)_{i\in[0..d]}$ un repère de $\mathcal{S}$. En notant $\mathcal{B}=\mathrm{Aff}\langle f(P_i)_{i\in[0..n]}\rangle$ le 1) donne $f(\mathcal{S})\subset\mathcal{B}$ (car $\mathcal{S}=\mathrm{Aff}\langle P_i\rangle$ par déf. d'un repère). De plus d'après 2) l'indépendance affine des $(P_i)_{i\in[0..d]}$ implique l'indépendance des $(f(P_i))_{i\in[0..d]}$, donc $\dim(\mathcal{B})=d$.
Soit $M\in\mathcal{B}$. Par bijectivité de f il existe $N\in\mathcal{E}$ tel que $f(N)=M$. Si $d=n$, $\mathcal{S}=\mathcal{E}$ et $N\in\mathcal{S}$.
Sinon $N\notin\mathcal{S}\Rightarrow N$ aff. indép. des $(P_i)_{i\in[0..d]}\overset{2)}{\Rightarrow} f(N)$ aff. indép. de $f(P_i)_{i\in[0..d]}\Rightarrow f(N)\notin\mathcal{B}\Rightarrow M\notin\mathcal{B}$.
impossible ! Donc dans les deux cas $N\in\mathcal{S}$ donc $M\in f(\mathcal{S})$ soit $\mathcal{B}\subset f(\mathcal{S})$.
Par double inclusion $f(\mathcal{S})=\mathcal{B}$ un SEA de dimension $d=\dim(\mathcal{S})$

4) MONTRER QUE DEUX DROITES PARALLÈLES ONT DES IMAGES PARALLÈLES

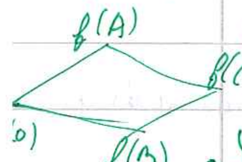
Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites strictement parallèles de $\mathcal{E}$. Notons $\Pi=\mathrm{Aff}\langle\mathcal{D},\mathcal{D}'\rangle$.
$f(\mathcal{D})\subset f(\Pi)$ et $f(\mathcal{D}')\subset f(\Pi)$ or d'après 3) $f(\Pi)$ est un plan : ainsi $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires. $f(\mathcal{D})\cap f(\mathcal{D}')=\{P\in\mathcal{F}\mid \exists A\in\mathcal{D}, f(A)=P, \exists B\in\mathcal{D}', f(B)=P\}\overset{\text{par bij de } f}{=}\{P\in\mathcal{F}\mid \exists A\in\mathcal{D}\cap\mathcal{D}', f(A)=P\}$
Or $\mathcal{D}\cap\mathcal{D}'=\emptyset$ donc $f(\mathcal{D})\cap f(\mathcal{D}')=\emptyset$: $f(\mathcal{D})$ et $f(\mathcal{D}')$ sont deux droites coplanaires qui ne se coupent pas, elles sont donc parallèles.

5) INTRODUIRE $\vec{f}$ ET σ_x TEL QUE $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ $\vec{f}(\lambda x)=\sigma_x(\lambda)\vec{f}(x)$

Soit $O\in\mathcal{E}$. On pose $\vec{f}=\left(\begin{array}{c}E\to F\\ u\mapsto\overrightarrow{f(O)f(O+u)}\end{array}\right)$ où E et F sont resp. les directions de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.



- Soit $(u,v)\in E^2$ tel que (u,v) soit libre. Il existe $(A,B,C)\in\mathcal{E}^3$ tq $\overrightarrow{OA}=u$, $\overrightarrow{OB}=v$, $\overrightarrow{OC}=u+v$.
$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=u+v-u=v=\overrightarrow{OB}$ donc $(AC)\parallel(OB)$ donc, d'après 4) $(f(A)f(C))\parallel(f(O)f(B))$
$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=u+v-v=u=\overrightarrow{OA}$ donc $(BC)\parallel(OA)$ donc d'après 4) $(f(B),f(C))\parallel(f(O)f(A))$



Ainsi $f(O)f(A)f(B)f(C)$ forme un parallélogramme dans $\mathcal{F}$, on a donc $\overrightarrow{f(O)f(C)}=\overrightarrow{f(O)f(A)}+\overrightarrow{f(O)f(B)}$
soit $\vec{f}(u+v)=\overrightarrow{f(O),f(O+u+v)}=\overrightarrow{f(O)f(C)}=\overrightarrow{f(O)f(A)}+\overrightarrow{f(O)f(B)}=\overrightarrow{f(O)f(O+u)}+\overrightarrow{f(O)f(O+v)}=\vec{f}(u)+\vec{f}(v)$.
- Soit $x\in E\setminus\{0\}$. On note $D_x=O+\mathbb{R}x$. $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\vec{f}(\lambda x)=\overrightarrow{f(O)f(O+\lambda x)}$ or O, $O+\lambda x$ et $O+x$ sont alignés sur D_x.
donc $f(O)$, $f(O+x)$ et $f(O+\lambda x)$ sont alignés, c'est pourquoi il existe $\sigma_x(\lambda)\in\mathbb{R}$ tel que $\vec{f}(\lambda x)=\sigma_x(\lambda)\underbrace{\overrightarrow{f(O)f(O+x)}}_{\vec{f}(x)}$.
Nécessairement $\sigma_x(1)=1$ et $\sigma_x(0)=0$