Algorithme de Newton

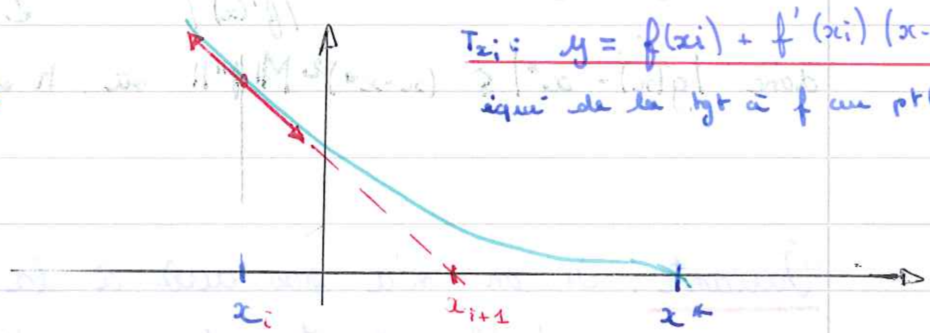
Problème On cherche à approcher x^* la solution de $f(x) = 0$

Définition de l'algo Si $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et si $f'(x^*) \neq 0$ alors on pose $\boxed{g = x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}}$ puis on applique l'algo du pt fixe

Interprétation graphique

$T_{x_i} : \; y = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i)$

équ de la tgt à f au pt $(x_i, f(x_i))$



On choisit x_{i+1} tq $T_{x_i}(x_{i+1}) = 0 \iff -f'(x_i)x_{i+1} = f(x_i) + f'(x_i)x_i$

$\iff x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i)$

$\iff x_{i+1} = g(x_i)$.

Écriture plus pratique de l'algo

x^0 fixé	$\forall n \in \mathbb{N} \quad x^{n+1} = x^n - \frac{f(x^n)}{f'(x^n)}$

Théorème Si f est de classe C^2 et si x^* est tq $f(x^*) = 0$ et $f'(x^*) \neq 0$
Alors pour x^0 assez proche de x^* l'algorithme de Newton converge de manière quadratique.

Preuve : L'idée est de montrer que x^* est 1 pt superattractif pr la méthode du pt fixe avec la f° g.

$f'(x^*) \neq 0$ et f' est continue dc il existe I un intervalle tq $x^* \in I$ et sur I $|f'| \geq \frac{|f'(x^*)|}{2} = a$

- g est défini sur I • g admet un point fixe x^* $(g(x^*) = x^* - 0)$
- $g'(x^*) = 1 - \frac{f'(x^*)f'(x^*) - \cancel{f''(x^*)f(x^*)}}{f'(x^*)^2}$ $=0$ car $f(x^*)=0$ $= 1 - f'(x^*)^2/f'(x^*)^2 = 1 - 1 = 0$.

→ Si f est aussi C^3 alors g est C^2 et on a 1 pt superattractif de g → cv quadratique
Cf pt fixe.

→ Si f est seulem^t C^2 alors g est seulem^t C^1

$$g(x) - x^* = g(x) - g(x^*) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} + \cancel{\frac{f(x^*)}{f'(x^*)}}^{=0} - x^* = x - x^* - \frac{f(x) - f(x^*)}{f'(x)}$$

or le dév. de Taylor Lagrange à l'ordre 2 de f donne

$$f(x) = f(x^*) + (x - x^*)\, f'(x) + \frac{(x-x^*)^2}{2} f''(c) \quad \text{où} \quad c \in [x, x^*] \text{ ou } [x^*, x].$$

donc $$0 = \frac{f(x^*) - f(x)}{f'(x)} + (x - x^*)\cancel{\frac{f'(x)}{f'(x)}} + \frac{(x-x^*)^2}{2}\, \frac{f''(c)}{f'(x)}$$

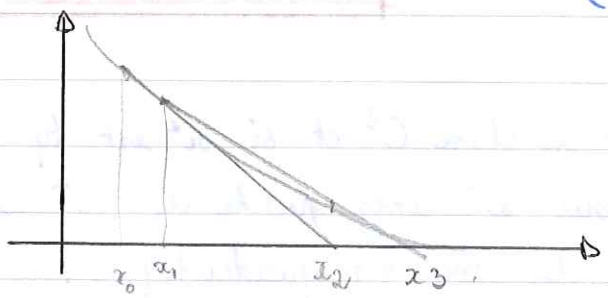
donc $$|g(x) - x^*| = \frac{(x-x^*)^2}{2}\, \frac{|f''(c)|}{|f'(x)|} \le \frac{(x-x^*)^2}{2}\, \frac{\|f''\|_{\infty \text{ sur } I}}{\alpha}$$

donc $|g(x) - x^*| \le (x - x^*)^2 M$, où M est une cst de cv. quadrat.

Variante. Si on n'a pas accès à la dérivée de f, plutôt qu'utiliser la tangente on utilise la sécante.

x^0 fixé x^1 fixé	$x^{n+1} = x^n - f(x^n)\,\dfrac{(x^n - x^{n-1})}{f(x^n) - f(x^{n-1})}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$	méthode de la sécante.

Interprétation C'est comme si on substituait $\dfrac{f(x^n) - f(x^{n-1})}{(x^n - x^{n-1})}$ à $f'(x^n)$



Variante. On peut aussi utiliser la méthode de Steffensen

x_0 fixé	$x^{n+1} = x_n - \dfrac{1}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}$

cela revient à remplacer $f'(x_n)$ par $\dfrac{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}{f(x_n)}$
par analogie avec $\dfrac{f(x_n + h) - f(x_n)}{h}$.