Lim. inf : la plus petite valeur d'adhérence

48.1 **Déf** Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.
La borne inférieure de A $= \inf A = \max \{c \in \overline{\mathbb{R}} \mid \forall x \in A, c \leq x\}$
C'est le plus grand des minorants de A.

48.2 **Pté** Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \inf A$.
On appelle alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite minimisante.

preuve : Notons $a = \inf A$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Si $[a, a+\frac{1}{n}] \cap A$ était vide, on aurait $\forall x \in A,\ x \in]-\infty, a[\cup]a+\frac{1}{n}, +\infty[$
or on a déjà $\forall x \in A,\ x \in [a, +\infty[$ donc on aurait $\forall x \in A,\ x \in]a+\frac{1}{n}, +\infty[$
et alors $a+\frac{1}{n}$ serait un majorant strictement plus grand que a censé être le plus grand des majorants. IMPOSSIBLE.
Donc $[a, a+\frac{1}{n}] \cap A$ étant non vide on prend $a_n \in A \cap [a, +\frac{1}{n}]$.
On construit ainsi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ et puisque $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists N \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{N} \leq \varepsilon$
on a $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq N,\ |a_n - a| = a_n - a \leq a + \frac{1}{n} - a = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \leq \varepsilon$
soit $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.

48.3 **Pté** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. $\left(\inf\limits_{k\geq n} x_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ c-à-d $\left(\inf\{x_k \mid k \geq n\}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, elle converge donc nécessairement dans $\overline{\mathbb{R}}$

preuve Intuitivement on prend l'inf sur un ensemble de plus en plus petit, on est donc de moins en moins petit.
Formellement notons $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\inf\limits_{k\geq n} x_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall k \geq n\ x_k \geq a_n$ donc $\forall k \geq n+1\ x_k \geq a_n$
ainsi a_n est un minorant de $\{x_k \mid k \geq n+1\}$ or $a_{n+1} = \inf\limits_{k \geq n+1} x_k$
est par déf. le plus grand minorant de cet ensemble
donc $a_n \leq a_{n+1}$. D'où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\nearrow$.

48.4 **Déf** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\inf\limits_{k\geq n} x_k\right)$

48.5 **Pté** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

$a = \liminf\limits_{n\to+\infty} x_n \in \mathbb{R} \Rightarrow a$ est la plus petite valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

preuve Montrons d'abord, en explicitant une suite extraite, que a est valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On note $\forall n\in\mathbb{N}$ $a_n = \inf\limits_{k\geq n} x_k$

On pose $\varphi(0) = 0$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose avoir déjà construit $(\varphi(i))_{i\in[0..n]} \in \mathbb{N}^n$ telle que $- \forall (i,j) \in [0..n]^2 \; i<j \Rightarrow \varphi(i) < \varphi(j)$

$- \forall i\in[1..n], \; |x_{\varphi(i)} - \inf\limits_{k\geq\varphi(i)} x_k| < 1/n$.

$a_{\varphi(n)+1} = \inf\limits_{k\geq\varphi(n)+1} x_k$. Donc par déf de l'inf il existe $p \geq \varphi(n)+1$ tel que $|x_p \leq a_{\varphi(n+1)}|$ $1/n+1$. On pose alors $\varphi(n+1) = p$ ainsi $|x_{\varphi(n+1)} - a_{\varphi(n+1)}| \leq 1/n+1$.

Par récurrence on construit φ une extraction vérifiant $\forall n\in\mathbb{N}$ $|x_{\varphi(n)} - a_{\varphi(n)}| \leq 1/n$. Reste à MQ $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.

Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}^{+*}$. Il existe, puisque $a = \lim\limits_{k\to+\infty} a_k$ par déf, $N_1\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geq N_1$ $|a_n - a| \leq \varepsilon/2$. De plus il existe $N_2\in\mathbb{N}$ tel que $1/N_2 \leq \varepsilon/2$.

alors $\forall n \geq \max(N_1, N_2)$
$$|x_{\varphi(n)} - a| = |x_{\varphi(n)} - a_{\varphi(n)} + a_{\varphi(n)} - a| \leq \underbrace{|x_{\varphi(n)} - a_{\varphi(n)}|}_{\substack{\leq 1/n \\ \leq 1/N_2 \\ \leq \varepsilon/2}} + \underbrace{|a_{\varphi(n)} - a|}_{\substack{\leq \varepsilon/2 \\ \text{car } \varphi(n)\geq n\geq N_1}} \leq \varepsilon$$

D'où $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ et donc a est bien valeur d'adhérence.

Montrons maintenant que c'est la plus petite. Soit a' une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il existe φ une extraction telle que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a'$.

Si $a' < a$. On note $e = a' - a > 0$. Puisque $a = \liminf_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} a_n$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|a_N - a| \leq e/3$ soit $a_N \geq a - e/3$.
Puisque $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} a'$ il existe $N' \geq N$ tel que $|x_{\varphi(N')} - a'| \leq e/3$.
Alors $x_{\varphi(N')} \leq a' + e/3 < a' + e/3 + e/3 = (a' + e) - e/3 = a - e/3 \leq a_N \leq \inf_{k \geq N} (x_k)$
or $\varphi(N') \geq N' \geq N$ donc $x_{\varphi(N')}$ ne peut être st. inférieur à $\inf_{k \geq N} (x_k)$.
D'où nécessairement $a' \geq a$, et a est bien la + petite valeur d'adhérence.