Intégrale d'une gaussienne

56.1 **Pté** $\forall d \in \mathbb{N}^*, \forall a \in \mathbb{R}^{+*},$ $\boxed{\int_{\mathbb{R}^d} e^{-a\|x\|^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}^{\,d}}$

Preuve • Si $d=1$ on pose $I = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx$

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx \times \int_{\mathbb{R}} e^{-ay^2} dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-a(x^2+y^2)} dx\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{+*} \times [0,2\pi]} e^{-ar^2} r\,dr\,d\theta$$

changement de variable polaire $r = x^2 + y^2$.

$$= \int_{\mathbb{R}^{+*}} e^{-(\sqrt{a}\,r)^2} r\,dr \times \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{+*}} e^{-u^2} \frac{1}{a} u\,du \times 2\pi$$

avec le changem^t de variable $u = \sqrt{a}\,r$
$du = \sqrt{a}\,dr$
donc $\frac{u\,du}{a} = \frac{\sqrt{a}\,r\,\sqrt{a}\,dr}{a} = r\,dr$

$$= -\frac{2\pi}{2a} \int_{\mathbb{R}^{+*}} -2u\,e^{-u^2} du$$

$$= -\frac{\pi}{a} \left[e^{-u^2} \right]_0^{+\infty}$$

$$= -\frac{\pi}{a} \left[0 - (e^0) \right] = -\frac{\pi}{a} \times -1$$

$$= \frac{\pi}{a} \quad \text{d'où } I = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

• Soit $d \in \mathbb{N}^*$.
On suppose la pté vraie sur $\mathbb{R}^{d+1}$.

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}} e^{-a\|x\|^2} dx = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}} e^{-a\sum_{k=1}^{d} x_k^2} e^{-a x_{d+1}^2} dx_1 \dots dx_d\, dx_{d+1}$$

Fubini

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-a\sum_{k=1}^{d} x_k^2} dx_1 \dots dx_d \right) e^{-a x_{d+1}^2} dx_{d+1}$$

Hyp de réc.

$$= \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}^{\,d} e^{-au^2} du$$

Pté au rang 1

$$= \sqrt{\frac{\pi}{a}}^{\,d} \times \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}^{\,d+1}.$$

D'où la pté vraie au rang $d+1$.