$d \in \mathbb{N}^*$
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On se place de $\mathbb{R}^d$ ds $\mathbb{K}$

Approximation de fonction L^p par convolution

53.1 **Rappel** • Si $(p,q,r) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$
Alors $\forall (f,g) \in L^p(\mathbb{R}^d) \times L^q(\mathbb{R}^d)$ $\|f \star g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \times \|g\|_{L^q}$

• $\forall p \in [1, +\infty[$ $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ (f° continues à support compact) est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$
(Cf fiche 53).

58.1 **Pté** $\forall p \in [1,+\infty[, \forall f \in L^p, \forall \varphi \in L^1$ tq $\|\varphi\|_{L^1} = 1$ $\boxed{\varphi_\varepsilon \star f \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\text{ds } L^p} f}$
où $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ $\varphi_\varepsilon = \begin{pmatrix} \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \varepsilon^{-d} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \end{pmatrix}$

Rq ⚠ Ne pas croire que cette propriété démontre la densité des f° continues à support compact dans L^p.
Au contraire cette formule explicite utilise ce résultat de densité.

Preuve Fixons p, f et φ comme dans les hypothèses.
Soit $\eta \in \mathbb{R}^{+*}$.
Par densité (Cf 53.) Il existe :
- $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ tq $\|f-g\|_{L^p} \leq \eta / 5\|\varphi\|_{L^1} = \eta/5$
- $\psi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ tq $\|\psi - \varphi\|_{L^1} \leq \eta / 5(\|g\|_{L^p} + 1)$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ $\varphi_\varepsilon \star f - f = \varphi_\varepsilon \star (f-g) + \varphi_\varepsilon \star g - \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(x)\,dx\right)}_{\substack{= 1 \\ \text{car } \|\varphi_\varepsilon\|_1 = \|\varphi\|_{L^1} \\ \text{par chgmt de var.}}} (f-g) - \underline{\left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(x)\,dx\right) g}$

or $\varphi_\varepsilon \star g = (\varphi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) \star g + \psi_\varepsilon \star g$ (en notant $\psi_\varepsilon = x \mapsto \varepsilon^{-d} \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$)
et $-\left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(x)\,dx\right) g = \left(-\int_{\mathbb{R}^d} (\varphi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)(x)\,dx\right) g - \left(\int_{\mathbb{R}^d} \psi_\varepsilon(x)\,dx\right) g$

D'où $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ $\varphi_\varepsilon \star f - f = \underbrace{\varphi_\varepsilon \star (f-g)}_{A_\varepsilon} + \underbrace{(\varphi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) \star g}_{B_\varepsilon} +$
$\underbrace{-\left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(x)\,dx\right)(f-g)}_{C_\varepsilon} \underbrace{- \left(\int_{\mathbb{R}^d} (\varphi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)(x)\,dx\right) g}_{D_\varepsilon}$
$+ \underbrace{\psi_\varepsilon \star g - \left(\int_{\mathbb{R}^d} \psi_\varepsilon(x)\,dx\right) g}_{E_\varepsilon}.$

Donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ $\quad \|\varphi_\varepsilon * f - f\|_{L^p} \leq \|A_\varepsilon\|_{L^p} + \|B_\varepsilon\|_{L^p} + \|C_\varepsilon\|_{L^p} + \|D_\varepsilon\|_{L^p} + \|E_\varepsilon\|_{L^p}$

- On pose $\begin{cases} \tilde{p} = 1 \\ \tilde{r} = p \\ \tilde{q} = p \end{cases}$ ainsi $\quad 1 + \frac{1}{\tilde{r}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{p} = \frac{1}{\tilde{p}} + \frac{1}{\tilde{q}}$.

Donc d'après le premier rappel on a

→ puisque $\varphi_\varepsilon \in L^1 = L^{\tilde{p}}$, $(f-g) \in L^p = L^{\tilde{q}}$
$$\|\varphi_\varepsilon * (f-g)\|_{L^p = L^{\tilde{r}}} \leq \|\varphi_\varepsilon\|_{L^1} \times \|f-g\|_{L^p} \leq \eta/5 \quad \text{soit } \|A_\varepsilon\| \leq \eta/5$$

→ puisque $(\varphi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) \in L^1$, $g \in L^p$
$$\|(\varphi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) * g\|_{L^p} \leq \|\varphi_\varepsilon - \psi_\varepsilon\|_{L^1} \times \|g\|_{L^p} \leq \eta/5 \quad \text{soit } \|B_\varepsilon\| \leq \eta/5$$

- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ $\quad \|C_\varepsilon\|_{L^p} = \|\underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(x)\,dx\right)}_{=1} (f-g)\|_{L^p} = \|f-g\|_{L^p} \leq \eta/5$

- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$
$$\begin{aligned} \|D_\varepsilon\|_{L^p} &= \left\| \left(\int_{\mathbb{R}^d} (\varphi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)(x)\,dx\right) \times g \right\|_{L^p} \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}^d} (\varphi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)(x)\,dx\right| \times \|g\|_{L^p} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi_\varepsilon - \psi_\varepsilon|(x)\,dx \times \|g\|_{L^p} \\ &= \|\varphi_\varepsilon - \psi_\varepsilon\|_{L^1} \times \|g\|_{L^p} \\ &= \|\varphi - \psi\|_{L^1} \times \|g\|_{L^p} \\ &\leq \eta/5. \end{aligned}$$

par chgm^t de variable on MQ $\varphi_\varepsilon - \psi_\varepsilon$ $(= (\varphi - \psi)_\varepsilon)$ a la m̂ norme L^1 que $\varphi - \psi$.

- Il nous reste à majorer $\|E_\varepsilon\|_{L^p} = \|\varphi_\varepsilon * g - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(x)\,dx\, g\|_{L^p}$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ $\forall x \in \mathbb{R}^d$
$$\begin{aligned} E_\varepsilon(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(x-y)\, g(y)\,dy - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(x-y)\,dy\; g(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(x-y)\,(g(y) - g(x))\,dy \end{aligned}$$

"idée" En fixant ε on choisira $\text{supp}(\varphi_\varepsilon)$ de manière à ce que les $(x,y) \in (\mathbb{R}^d)^2$ tq $(x-y) \in \text{supp}(\varphi_\varepsilon)$ soient assez proche pour que $|g(y) - g(x)|$ soit assez petit (en utilisant l'uniforme continuité de g. Ainsi on majorera $\|E_\varepsilon\|_\infty$.
Avant de faire cette manipulation on s'intéresse au support de $\varphi_\varepsilon * g$ et donc de E_ε pour savoir quelle petitesse on doit imposer à $\|E_\varepsilon\|_\infty$ pr que $\|E_\varepsilon\|_{L^p} \leq \eta/5$.
(sachant que $\forall f$ $\|f\|_{L^p} \leq \underbrace{\mu(\text{supp}(f))}_{\text{éventuellem}^t\ \infty} \times \|f\|_\infty$

- Ψ est à support compact donc il existe $R \in \mathbb{R}^{+*}$ tq $\mathrm{supp}(\Psi) \subset \mathcal{B}(0_{\mathbb{R}^d}, R)$
- $\forall \varepsilon \in]0,1[$, $\mathrm{supp}(\Psi_\varepsilon * g) \subset \mathrm{supp}(g) + \mathcal{B}(0,R) = \{x+y \mid x \in \mathrm{supp}(g), y \in \mathcal{B}(0,R)\}$

En effet soit $x \in (\mathrm{supp}(g) + \mathcal{B}(0,R))^c$.

$$\Psi_\varepsilon * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varepsilon^{-d}\, \Psi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) g(y)\,dy$$

$$= \int_{\mathrm{supp}(g)} \varepsilon^{-d}\, \Psi\left(\frac{x}{\varepsilon} - \frac{y}{\varepsilon}\right) g(y)\,dy.$$

Si $\Psi_\varepsilon * g(x) \neq 0$, il existe néc $y \in \mathrm{supp}(g)$ tq $\Psi\left(\frac{x}{\varepsilon} - y/\varepsilon\right) \neq 0$
soit $\frac{x}{\varepsilon} - y/\varepsilon \in \mathrm{supp}(\Psi) \subset \mathcal{B}(0,R)$. Alors il existe $z \in \mathcal{B}(0,R)$ tel que
$\frac{x}{\varepsilon} = z + y/\varepsilon$ donc $x = z\varepsilon + y = z' + y$ où $z' = z\varepsilon \in \mathcal{B}(0, \varepsilon R) \subset \mathcal{B}(0,R)$ et $y \in \mathrm{supp}(g)$] IMPOSSIBLE par

- $\forall \varepsilon \in]0,1[$ $\mathrm{supp}(E_\varepsilon) = \mathrm{supp}(\Psi_\varepsilon * g - g)$

$$\subset \mathrm{supp}(\Psi_\varepsilon * g) \cap \mathrm{supp}(g)$$
$$\subset (\mathrm{supp}(g) + \mathcal{B}(0,R)) \cap \mathrm{supp}(g)$$
$$= \mathrm{supp}(g) + \mathcal{B}(0,R).$$

On pose alors $M = \mu(\mathrm{supp}(g) + \mathcal{B}(0,R)) \in \mathbb{R}^{+*}$ où μ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

· On peut maintenant chercher à majorer E_ε.
Par uniforme continuité de g il existe $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que
$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^d)^2$ $\|x-y\|_{\mathbb{R}^d} \leq \alpha \Rightarrow |g(x) - g(y)| \leq \frac{\eta}{5M^{1/p}} \times \frac{1}{\|\Psi\|_{L^1}}$

On pose alors, enfin !, $\varepsilon \leq \min\left(1, \frac{\alpha}{R}\right)$.
$\varepsilon < \frac{\alpha}{R}$ donc $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^d)^2$, $(x-y) \in \mathrm{supp}(\Psi_\varepsilon) \Rightarrow \frac{x-y}{\varepsilon} \in \mathrm{supp}\,\Psi$

$$\Rightarrow \left\|\frac{x-y}{\varepsilon}\right\|_{\mathbb{R}^d} \leq R$$
$$\Rightarrow \|x-y\|_{\mathbb{R}^d} \leq R\varepsilon \leq \alpha$$
$$\Rightarrow |g(x) - g(y)| \leq \frac{\eta}{5M^{1/p}\|\Psi\|_{L^1}}$$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}^d$

$$|E_\varepsilon(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\Psi_\varepsilon(x-y)|\,|g(x) - g(y)|\,dy = \int_{y \text{ tq } x-y \in \mathrm{supp}\,\Psi_\varepsilon} |\Psi_\varepsilon(x-y)|\, \underbrace{|g(x) - g(y)|}_{\leq \eta / 5M^{1/p}\|\Psi\|_{L^1}}\,dy$$

$$\leq \frac{\eta}{5M^{1/p}\|\Psi\|_{L^1}} \times \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} |\Psi_\varepsilon(x-y)|\,dy}_{= \int_{\mathbb{R}^d} |\Psi_\varepsilon(y)|\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} |\Psi(y)|\,dy = \|\Psi\|_{L^1}}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^d \; |E_\varepsilon(x)| \leq \dfrac{\eta}{5M^{1/p}}$ d'où $\|E_\varepsilon\|_\infty \leq \dfrac{\eta}{5M^{1/p}}$.

Alors $\|E_\varepsilon\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |E_\varepsilon(x)|^p dx\right)^{1/p} = \left(\int_{\mathrm{supp}(E_\varepsilon)} |E_\varepsilon(x)|^p dx\right)^{1/p}$

$$\leq \left(\int_{\mathrm{supp}(g)+\mathcal{B}(0,R)} \|E_\varepsilon\|_\infty^p \, dx\right)^{1/p}$$

$$\leq \left(\left(\frac{\eta}{5}\right)^p \cancel{\underbrace{\int_{\mathrm{supp}(g)+\mathcal{B}(0,R)} dx}_{M}} \times \frac{1}{(M^{1/p})^p}\right)^{1/p}$$

$$= \frac{\eta}{5}$$

D'où finalem^t $\|\varphi_\varepsilon * f - f\| \leq 5 \times \eta/5 = \eta$. CQFD.