Une expression de la norme L^p

61.1 **Pté** Soit (X,μ) un espace mesuré σ-fini. Soit $p \in [1..+\infty]$
Soit f une fonction mesurable sur (X,μ) à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Si $\sup\left\{\int_X |f(x)g(x)|\,d\mu(x) \mid g \in \mathcal{B}_{L^{p'}}(0,1)\right\} < \infty$
Alors $f \in L^p(X)$ et $\|f\|_{L^p} = \sup\left\{\left|\int_X f(x)g(x)\,d\mu(x)\right| \mid g \in \mathcal{B}_{L^{p'}}(0,1)\right\}$

Rq On note ici p' le conjugué de p c-à-d $p' = \infty$ si $p = 1$, $p' = 1$ si $p = \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$ sinon.

Preuve - Puisque X est σ-fini pour μ il existe $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}(X)^{\mathbb{N}}$ tel que - $\forall n \in \mathbb{N}, \mu(A_n) < \infty$ - $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$ - $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow$ pr l'inclusion

- On note $M_f = \sup\left\{\int_X |f(x)g(x)|\,d\mu(x) \mid g \in \mathcal{B}_{L^{p'}}(0,1)\right\}$

$N_f = \sup\left\{\left|\int_X f(x)g(x)\,d\mu(x)\right| \mid g \in \mathcal{B}_{L^{p'}}(0,1)\right\}$

On a toujours $\boxed{0 \leq N_f \leq M_f}$

Si $p = 1$ * $\forall g \in L^{p'}(X) = L^\infty(X)$ tq $\|g\|_{L^\infty} \leq 1$

$$\int_X |f(x)g(x)|\,d\mu(x) \leq \int_X |f(x)|\,\|g\|_{L^\infty}\,d\mu(x)$$
$$= \underbrace{\|g\|_{L^\infty}}_{\leq 1} \int_X |f(x)|\,d\mu(x).$$

En passant au sup sur g on a alors $(N_f \leq)\ M_f \leq \int_X |f(x)|\,d\mu(x)$

* On pose $\tilde{g} = \left(\begin{array}{l} X \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) = 0 \\ \overline{f(x)}/|f(x)| & \text{sinon} \end{cases}\end{array}\right)$. $\forall x \in X$ $|\tilde{g}(x)| \leq 1$ donc $\tilde{g} \in L^\infty$ et $\|\tilde{g}\|_{L^\infty} \leq 1$

Donc $N_f \geq \left|\int_X f(x)\tilde{g}(x)\,d\mu(x)\right| = \left|\int_{\mathrm{supp}(f)} f(x) \times \frac{\overline{f(x)}}{|f(x)|}\,d\mu(x)\right|$

$$= \left|\int_{\mathrm{supp}(f)} \frac{|f(x)|^{\cancel{2}}}{\cancel{|f(x)|}}\,d\mu(x)\right| = \left|\int_X |f(x)|\,d\mu(x)\right| = \int_X |f(x)|\,d\mu(x)$$

Par double inégalité on a $N_f = M_f = \int_X |f(x)|\,d\mu(x)$.
Par hypothèse $M_f < \infty$ donc $f \in L^1$ et $\|f\|_{L^1} = N_f$. CQFD.

Si $p \in]1..+\infty[$ $\quad p' = \frac{p}{p-1}$ $\qquad$ On suppose $f \neq 0$ (car pr $f=0$ c'est évident)

* $\forall g \in \mathcal{B}(0_{L^{p'}}, 1)$

inégalité de Hölder

$$\int_X |f(x)\, g(x)|\, d\mu(x) \leq \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \times \underbrace{\left(\int_X |g(x)|^{p'} d\mu(x)\right)^{1/p'}}_{\|g\|_{L^{p'}} \leq 1}$$

Donc en passant au sup sur g on obtient :

$(Nf) \leq Mf \leq \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p}$

* - $\forall n \in \mathbb{N}$ on pose $f_n = \begin{pmatrix} X \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \mathbb{1}_{A_n}(x) \times \mathbb{1}_{[0,n]}(|f(x)|) \times f(x) \end{pmatrix}$

- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X, |f_n(x)| \leq n$ donc $f_n \in L^\infty(X)$

- $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int_X |f_n(x)|\, d\mu(x) = \int_{A_n} \mathbb{1}_{[0,n]}(|f(x)|)\, |f(x)|\, d\mu(x)$

$$\leq \int_{A_n} n\, d\mu(x)$$

$$= n\, \mu(A_n) < \infty$$

donc $f_n \in L^1(X)$

$\hookrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in L^1(X) \cap L^\infty(X)$ donc $f_n \in L^p(X)$ et $f_n \in L^{p'}(X)$.

- $\forall n \in \mathbb{N}$ tq $f_n \neq 0$ on pose $g_n = \begin{pmatrix} X \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto 0 \text{ si } f_n(x) = 0 \\ \frac{f_n(x)}{|f_n(x)|} \; \frac{|f_n(x)|^{p-1}}{\|f_n\|_{L^p}^{p-1}} \end{pmatrix}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ assez grand pr que $f_n \neq 0$ $\int_X |g_n(x)|^{p'} d\mu(x) = \int_{supp(f_n)} \left(1 \times \left(\frac{|f_n(x)|}{\|f_n\|_{L^p}}\right)^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}} d\mu(x)$

$$= \int_{supp(f_n)} \frac{|f_n(x)|^p}{\|f_n\|_{L^p}^p}\, d\mu(x)$$

$$= \frac{1}{\|f_n\|_{L^p}^p} \int_X |f_n(x)|^p\, d\mu(x)$$

$$= \frac{\|f_n\|_{L^p}^p}{\|f_n\|_{L^p}^p} = 1$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$ assez gd $g_n \in \mathcal{B}(0_{L^{p'}}, 1)$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$ assez gd. $Nf \geq \left|\int_X f_n(x)\, g_n(x)\, d\mu(x)\right|$

S1.1

Or $\forall n \in \mathbb{N}$ (assez grand) $\int_X f_n(x)\, g_n(x)\, d\mu(x) = \int_{supp(f_n)} \frac{f_n(x) \times \overline{f_n(x)}}{|f_n(x)|} |f_n(x)|^{p-1} d\mu(x) \times \frac{1}{\|f_n\|_{L^p}^{p-1}}$

$$= \frac{1}{\|f_n\|_{L^p}^{p-1}} \int_{supp(f_n)} \frac{|f_n(x)|^2 |f_n(x)|^{p-1}}{|f_n(x)|} d\mu(x)$$

$$= \frac{1}{\|f_n\|_{L^p}^{p-1}} \int_X |f_n(x)|^p d\mu(x) = \frac{\|f_n\|_{L^p}^p}{\|f_n\|_{L^p}^{p-1}}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $(Mf \geq)\ Nf \geq \|f_n\|_{L^p}$

Or $(|f_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions positives tendant point à point vers $|f|^p$. Le théorème de convergence monotone donne alors $\lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n(x)|^p d\mu(x) = \int_X |f(x)|^p d\mu(x)$.

Par continuité de la puissance $1/p$ on a de $\lim_{n\to+\infty} \left(\int_X |f_n(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p}$
soit $\left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} = \lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_{L^p} \leq Nf$

Donc double inégalité $\left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} = Nf = Mf$
et par hypothèse $Mf < \infty$ donc $f \in L^p$ et $\|f\|_{L^p} = Nf$. CQFD.

Si $p = \infty$ On pose $Af = \{\lambda \in \mathbb{R}^{+*} \mid \mu(|f| > \lambda) > 0\}$
On rappelle que $f \in L^\infty \Leftrightarrow Af$ est majoré $\Leftrightarrow \sup Af < \infty$

* Soit $g \in L^1(X)$ tq $\|g\|_{L^1} \leq 1$.
$\int_X |f(x) g(x)| d\mu(x) \leq \underbrace{\int_X |g(x)| d\mu(x)}_{= \|g\|_{L^1} \leq 1} \times \sup Af$

En passant au sup sur g on a $(Nf) \geq Mf \geq \sup Af$.

* $\forall \lambda \in \mathbb{R}^{+*}, \forall n \in \mathbb{N}$ On pose $A_{n,\lambda} = \{x \in A_n \mid |f(x)| > \lambda\}$
$A_{n,\lambda} \subset A_n$ donc $\mu(A_{n,\lambda}) \leq \mu(A_n) < \infty$.
$\forall \lambda \in Af, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N\ \mu(A_n \cap \{x \mid |f(x)| > \lambda\}) \neq 0$ car $\mu(|f| > \lambda) > 0$
et $A_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} X$

Donc $\forall \lambda \in A_f, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \ \mu(A_{n,\lambda}) > 0$. (on dira "n assez grand")

$\forall \lambda \in A_f$, $\forall n$ assez grd, on pose $g_{\lambda,n} = \left(\begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin A_{n,\lambda} \\ \frac{1}{\mu(A_{n,\lambda})} \frac{\overline{f(x)}}{|f(x)|} \text{ sinon} \end{cases} \end{array} \right)$

$\forall \lambda \in A_f$, $\forall n$ assez grand

$\int_X |g_{\lambda,n}(x)| \, d\mu(x) = \int_{A_{n,\lambda}} \frac{1}{\mu(A_{n,\lambda})} \times |1| \, d\mu(x) = \frac{1}{\mu(A_{n,\lambda})} \int_{A_{n,\lambda}} d\mu(x) = 1$

donc $g_{\lambda,n} \in \mathcal{B}(0_{L^1}, 1)$.

donc $\forall \lambda \in A_f$, $\forall n$ assez grand $(M_f \geq)\ N_f \geq \left| \int_X f(x) g(x) \, d\mu(x) \right|$

$$= \left| \int_{A_{n,\lambda}} \frac{f(x)\overline{f(x)}}{|f(x)|} \, d\mu(x) \times \frac{1}{\mu(A_{n,\lambda})} \right|$$

$$= \left| \int_{A_{n,\lambda}} \underbrace{|f(x)|}_{\geq \lambda} \, d\mu(x) \right| \times \frac{1}{\mu(A_{n,\lambda})}$$

$$\geq \lambda \ \cancel{\left| \int_{A_{n,\lambda}} d\mu(x) \right| \times \frac{1}{\mu(A_{n,\lambda})}}$$

Donc en passant au sup pour λ on a $(M_f \geq) N_f \geq \sup A_f$.

Par double inégalité $\sup A_f = N_f = M_f$ et puisque par hypothèse $M_f < \infty$ on a $f \in L^\infty$ et $\|f\|_{L^\infty} = N_f$ CQFD