# Topologies

63.1 **Déf** Soit $X$ un ensemble non vide
$\Theta$ est une topologie pour $X$ $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \Theta \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \\ \emptyset \in \Theta \text{ et } X \in \Theta \\ \Theta \text{ stable par union} \\ \Theta \text{ stable par intersection finie} \end{cases}$

**Notation** Ici on notera $T(X)$ l'ensemble des topologies pour $X$.

63.2 **Pté** Soit $X$ un ensemble non vide. $\forall (\Theta_1, \Theta_2) \in T(X)^2$, $\Theta_1 \cap \Theta_2 \in T(X)$
En fait $T(X)$ est stable par intersection.

**Preuve** · Clairement $\Theta_1 \cap \Theta_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$, $\emptyset \in \Theta_1 \cap \Theta_2$ car $\emptyset \in \Theta_1$ et $\emptyset \in \Theta_2$
$X \in \Theta_1 \cap \Theta_2$ — $X \in \Theta_1$ et $X \in \Theta_2$

· Soit $(U_i)_{i \in I} \in (\Theta_1 \cap \Theta_2)^I$.
→ $\forall i \in I$ $U_i \in \Theta_1 \cap \Theta_2 \subset \Theta_1$, or $\Theta_1$ stable par union, donc $\bigcup_{i \in I} U_i \in \Theta_1$.
De même $\bigcup_{i \in I} U_i \in \Theta_2$. donc $\bigcup_{i \in I} U_i \in \Theta_1 \cap \Theta_2$
→ Si $I$ est fini puisque $\Theta_1$ est stable par intersection fini, on a $\bigcap_{i \in I} U_i \in \Theta_1$.
De même $\bigcap_{i \in I} U_i \in \Theta_2$ donc $\bigcap_{i \in I} U_i \in \Theta_1 \cap \Theta_2$.
Donc $\Theta_1 \cap \Theta_2$ est bien stable par union et par intersection finie.
Donc $\Theta_1 \cap \Theta_2$ est bien une topologie pour $X$. De plus on pourrait faire la même preuve pour RQ $\bigcap_{j \in J} \Theta_j \in T(X)$ pour $(\Theta_j)_{j \in J} \in T(X)^J$.

63.3 **Pté** Soit $X$ un ensemble non vide.
$\mathcal{P}(X) \in T(X)$ et $\{\emptyset, X\} \in T(X)$

**Preuve** · $\mathcal{P}(X) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$. évidement $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$ et $X \in \mathcal{P}(X)$.
De plus $\mathcal{P}(X)$ est clairement stable par intersection et union.
· $\{\emptyset, X\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$. $\emptyset \in \{\emptyset, X\}$ et $X \in \{\emptyset, X\}$.
Soit $(U_i)_{i \in I} \in \{\emptyset, X\}^I$. Si $\emptyset \in \{U_i\}_{i \in I}$ $\bigcap_{i \in I} U_i = \emptyset \in \{\emptyset, X\}$, sinon $\bigcap_{i \in I} U_i = \bigcap_{i \in I} X = X \in \{\emptyset, X\}$
Si $X \in$ —— $\bigcup_{i \in I} U_i = X \in \{\emptyset, X\}$ sinon $\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} \emptyset = \emptyset \in \{\emptyset, X\}$
Donc $\{\emptyset, X\}$ est stable par intersection et union.

63.4 **Déf** Sous ces notations, on les appelle topologies triviales
$\{\emptyset, X\}$ est la topologie grossière
$\mathcal{P}(X)$ est la topologie discrète

63.5 **Déf** Soit $(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2) \in T(X)$ où $X$ est un ensemble non vide
$\mathcal{O}_1$ est plus fine que $\mathcal{O}_2$ $\Leftrightarrow$ $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$

63.6 **Pté** Toute topologie est plus fine que la topologie grossière.
La topologie discrète est plus fine que toute autre.

**Preuve** Evident $\forall \mathcal{O} \in T(X) \quad \{\emptyset, X\} \subset \mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$.

63.7 **Pté/déf** Soit $X$ un ensemble non vide. Soit $\mathcal{C} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$.
On pose $T_{\mathcal{C}}(X) = \{\mathcal{O} \in T(X) \mid \mathcal{C} \subset \mathcal{O}\}$. $T_{\mathcal{C}}(X) \neq \emptyset$ et $\bigcap_{\mathcal{O} \in T_{\mathcal{C}}(X)} \mathcal{O} \in T(X)$.
La topologie sur $X$ engendrée par $\mathcal{C}$ est alors $\bigcap_{\mathcal{O} \in T_{\mathcal{C}}(X)} \mathcal{O}$

**Preuve** $\mathcal{P}(X) \in T(X)$ 63.3 et $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ donc $\mathcal{P}(X) \in T_{\mathcal{C}}(X)$ d'où $T_{\mathcal{C}}(X) \neq \emptyset$.
Puis $\bigcap_{\mathcal{O} \in T_{\mathcal{C}}(X)} \mathcal{O}$ est une intersection d'élément de $T(X)$ donc d'après 63.2 c'est encore un élément de $T(X)$.

63.8 **Pté** La topologie discrète est engendrée par les singletons

**Preuve** Soit $X$ un ensemble. Ici $\mathcal{C}$ est $= \{\{x\} \mid x \in X\}$ l'ensemble des singletons de $X$.
$\forall U \in \mathcal{C}, U \in \mathcal{P}(X)$ donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ or $\mathcal{P}(X) \in T(X)$ donc $\mathcal{P}(X) \in T_{\mathcal{C}}(X)$.
Montrons que $T_{\mathcal{C}}(X) = \{\mathcal{P}(X)\}$. Soit $A \in T_{\mathcal{C}}(X)$. Supposons $A \neq \mathcal{P}(X)$.
Il existe donc $P \in \mathcal{P}(X)$ tq $P \notin A$. Or $P = \bigcup_{x \in P} \underbrace{\{x\}}_{\in A \text{ car } \in \mathcal{C} \subset A}$. Donc $A$ n'est pas stable par union. IMPOSSIBLE.
D'où $T_{\mathcal{C}}(X) = \{\mathcal{P}(X)\}$ et $\bigcap_{\mathcal{O} \in T_{\mathcal{C}}(X)} \mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$.

63.9 **Pté** Soit $(X,\Theta)$ un espace topologique (c-à-d $\Theta \in T(X)$ où $X$ ens non vide)
Soit $Y \subset X$. $\Theta' = \{U \cap Y \mid U \in \Theta\} \in T(Y)$

<u>Preuve</u> . $\forall U \in \Theta$, $U \cap Y \subset Y$ soit $U \cap Y \in \mathcal{P}(Y)$, d'où $\Theta' \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y))$
- $\emptyset \in \Theta$ et $\emptyset \cap Y = \emptyset$ donc $\emptyset \in \Theta'$
- $X \in \Theta$ et $X \cap Y = Y$ donc $Y \in \Theta'$
- Soit $(V_i)_{i\in I} \in (\Theta')^I$. Il existe $(U_i)_{i\in I} \in \Theta^I$ tel que $\forall i \in I$ $V_i = U_i \cap Y$
  - ↪ $\bigcup_{i\in I} V_i = \bigcup_{i\in I} U_i \cap Y = \left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) \cap Y$ or $\bigcup_{i\in I} U_i \in \Theta$ car $\Theta$ stable par union donc $\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) \cap Y \in \Theta'$ d'où $\bigcup_{i\in I} V_i \in \Theta'$
  - ↪ Si $I$ est fini $\bigcap_{i\in I} V_i = \bigcap_{i\in I}(U_i \cap Y) = \left(\bigcap_{i\in I} U_i\right) \cap Y$ or $\bigcap_{i\in I} U_i \in \Theta$ car $\Theta$ est stable par intersection finie donc $\bigcap_{i\in I} V_i \in \Theta'$.

Donc $\Theta'$ est stable par intersection finie et union.

63.10 **Déf** Sous ces notations $\Theta'$ est la <u>topologie induite par $\Theta$ sur $Y$</u>

63.11 **Déf** Soient $(X, \Theta_1)$ et $(Y, \Theta_2)$ deux espaces topologiques
Notons $\Theta_1 \times \Theta_2 = \{U \times V \mid U \in \Theta_1, V \in \Theta_2\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X \times Y))$.
<u>La topologie produit</u> (sous-entendu de $\Theta_1$ et $\Theta_2$) est la topologie pour $X \times Y$ engendrée par $\Theta_1 \times \Theta_2$

63.12 **Déf** Soient $(X, \Theta)$ et $(Y, \gamma)$ deux espaces topologiques.
Soit $f \in \mathcal{F}(X, Y)$. Soit $x \in X$
- $f$ est <u>continue en $x$</u> $\iff$ $\forall V \in \gamma$, $f(x) \in V$, $\exists U \in \Theta$, $x \in U$ et $f(U) \subset V$
- $f$ est <u>continue</u> $\iff$ $f$ est continue en $t$ pour tout $t \in X$.

⚠ Ces deux définitions sont fortement dépendantes des topologies $\Theta$ et $\gamma$ dont on a muni les espaces $X$ et $Y$.