Ouverts et fermés en topologie générale

Déf Soit X un ensemble non vide. Soit Θ une topologie pour X cf 63.1

64.1 • (X,Θ) est alors appelé <u>espace topologique</u>

64.2 • Les éléments de Θ sont alors appelés les <u>ouverts de X</u>

64.3 • $A \in \mathcal{P}(X)$ est un <u>fermé de X</u> $\Longleftrightarrow$ $A^c = X_{\setminus A} \in \Theta$

64.4 **Déf** Soit (X,Θ) un espace topologique. Soit $P \in \mathcal{P}(X)$. Soit $x \in P$

• x est un <u>point intérieur à P</u> $\quad \exists V \in \Theta$ tq $x \in V$ et $V \subset P$

• <u>L'intérieur de P</u>, noté $\mathring{P}$ ou $\mathrm{int}(P)$, est l'ensemble de ses points intérieurs.

64.5 **Pté** Soit (X,Θ) un espace topologique. Soit $P \in \mathcal{P}(X)$.

• $\mathrm{int}(P) \subset P$

• $\mathrm{int}(P) = P \Longleftrightarrow P$ est ouvert

<u>Preuve</u> (a) Si $x \in \mathrm{int}(P)$, il existe $U \in \Theta$ tel que $x \in U \subset P$ donc $x \in P$

D'où $\mathrm{int}(P) \subset P$

(b) Si P est ouvert, alors pour tout $x \in P$, P est un ouvert tel que $x \in P$ et $P \subset P$, donc $x \in \mathrm{int}(P)$. D'où $P \subset \mathrm{int}(P)$.

Or on a l'autre inclusion par (a) d'où $P = \mathrm{int}(P)$.

Réciproquement si $\mathrm{int}(P) = P$, alors pour tout $x \in P$ il existe U_x ouvert tel que $x \in U_x$ et $U_x \subset P$.

Donc $P \subset \bigcup_{x \in P} \{x\} \subset \bigcup_{x \in P} U_x \subset P$ soit $P = \bigcup_{x \in P} U_x$ est ouvert en tant qu'union d'ouverts.

64.5 bis <u>Cor</u> Sous ces notations P est ouvert $\Longleftrightarrow \forall x \in P, \exists U$ ouvert, $x \in U \subset P$

64.6 **Déf** Soit (X,Θ) un espace topologique. Soit $P \in \mathcal{P}(X)$. Soit $x \in P$

- x est un point adhérent à $P \iff \forall U \in \Theta,\ x \in U \Rightarrow U \cap P \neq \emptyset$
- L'adhérence de P, notée $\overline{P}$ ou $adh(P)$, est l'ensemble de ses points adhérents

64.7 **Pté** Soit (X,Θ) un espace topologique. Soit $P \in \mathcal{P}(X)$

- $P \subset adh(P)$
- $P = adh(P) \iff P$ est fermé

Preuve (a) Soit $x \in P$. Soit U un ouvert tel que $x \in U$.
$x \in U \cap P$ donc $U \cap P \neq \emptyset$, donc $x \in adh(P)$. d'où $P \subset adh(P)$

(b). Si P est fermé.
Par définition P^c est ouvert. Soit $x \in P^c$. Il existe donc U un ouvert de X tel que $x \in U$ et $U \subset A^c$.
Donc $U \cap P = \emptyset$. Donc $x \notin adh(P)$. D'où $P^c \subset adh(P)^c$
Par "contraposée" on en déduit $adh(P) \subset P$, or par (a) on a déjà l'autre inclusion. D'où $P = adh(P)$.

- Réciproquement si $P = adh(P)$.
Soit $x \in P^c$. $x \notin adh(P)$ donc il existe U un ouvert tel que $U \cap P = \emptyset$, donc tel que $U \subset P^c$. Ainsi (par 64.5.bis) P^c est ouvert, donc P fermé.

64.7.bis **Cor** Sous ces notations P est fermée $\iff \forall x \in P, \forall U \in \Theta,\ x \in U \Rightarrow U \cap P \neq \emptyset$

64.8 **Pté** Soit (X, Θ) un espace topologique. Soit $P \in \mathcal{P}(X)$.

- $\text{int}(P)^c = \text{adh}(P^c)$
- $\text{adh}(P)^c = \text{int}(P^c)$

Preuve · $x \in \text{int}(P)^c \iff x \notin \text{int}\, P$

$$\iff \forall U \in \Theta,\ x \in U \Rightarrow U \not\subset P$$
$$\iff \forall U \in \Theta,\ x \in U \Rightarrow U \cap P^c \neq \emptyset$$
$$\iff x \in \text{adh}(P^c)$$

· $x \in \text{adh}(P)^c \iff x \notin \text{adh}(P)$

$$\iff \exists U \in \Theta,\ x \in U \text{ et } U \cap P = \emptyset$$
$$\iff \exists U \in \Theta,\ x \in U \text{ et } U \subset P^c$$
$$\iff x \in \text{int}(P^c).$$

64.9 **Pté** Soit (X, Θ) un espace topologique. Soit $P \in \mathcal{P}(X)$.

- $\text{adh}(P)$ est fermé
- $\text{int}(P)$ est ouvert

Preuve (a) Soit $x \in \text{adh}(\text{adh}(P))$

Soit U un ouvert contenant x.

Puisque $x \in \text{adh}(\text{adh}(P))$ $U \cap \text{adh}(P) \neq \emptyset$.

Soit $y \in U \cap \text{adh}(P)$. U est un ouvert contenant y,

or $y \in \text{adh}(P)$, donc $U \cap P \neq \emptyset$.

D'où $x \in \text{adh}(P)$.

Ainsi $\text{adh}(\text{adh}(P)) = \text{adh}(P)$, donc $\text{adh}(P)$ fermé

(b) Par la propriété précédente (64.8) $\text{int}(P)^c = \text{adh}(P^c)$.

Or d'après (a) $\text{adh}(P^c)$ est fermé. Donc $\text{int}(P)$ est ouvert.

64.10 **Pté** Soit (X,Θ) un espace topologique. Soit $(A,B)\in\mathcal{P}(X)^2$

$A\subset B \Rightarrow int(A)\subset int(B)$ et $adh(A)\subset adh(B)$

__Preuve__ · Soit $x\in int(A)$. Il existe $U\in\Theta$ tel que $x\in U$ et $U\subset A$ or $A\subset B$ donc $U\subset B$. Donc $x\in int(B)$. D'où $int(A)\subset int(B)$.

· Soit $x\in adh(A)$. Soit $U\in\Theta$ tel que $x\in U$. Néc. $U\cap A\neq\emptyset$ Or $A\subset B$ donc $U\cap A\subset U\cap B$, d'où $U\cap B\neq\emptyset$. donc $x\in adh(B)$. D'où $adh(A)\subset adh(B)$.

64.11 **Pté** Soit (X,Θ) un espace topologique. Soit $P\in\mathcal{P}(X)$.

- $int(P)$ est le plus grand ouvert contenu dans P
- $adh(P)$ est le plus petit fermé contenant P

__Preuve__ · Soit U un ouvert contenu dans P.

$U\subset P$ donc (64.10) $int(U)\subset int(P)$
U ouvert donc (64.5) $int(U)=U$
} d'où $U\subset int(P)$

· Soit F un fermé contenant P

$P\subset F$ donc (64.10) $adh(P)\subset adh(F)$
F fermé donc (64.7) $adh(\ ) =$
} $F\subset adh(P)$.