Fonction continue d'un compact dans un séparé (topo générale)

66.1 **Pté** Soient A et B deux espaces topologiques. Soit $f \in \mathcal{F}(A, B)$

- A compact
- B séparé
- f continue et surjective

$\Rightarrow$ f est une application ouverte
i.e $\forall U$ ouvert de A, $f(U)$ est ouvert de B.

Preuve Soit U un ouvert de A.

On veut montrer que $f(U)$ est ouvert dans B.

On montre pour cela que tout point de $f(U)$ lui est intérieur.

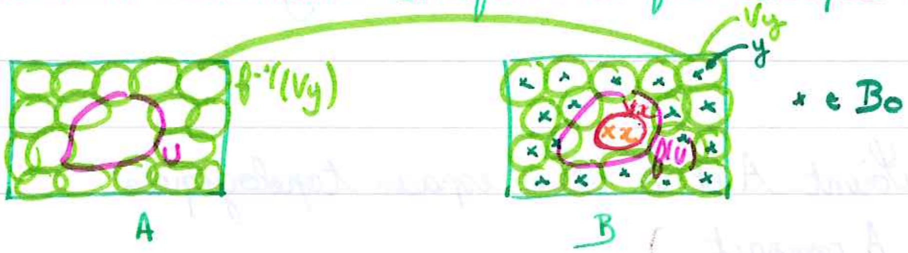
Soit $x \in f(U)$.

$\forall y \in f(U)^c$, $x \neq y$, donc par séparation de B ② il existe V_y et V_x^y deux ouverts de B tels que $y \in V_y$, $x \in V_x^y$ et $V_x^y \cap V_y = \emptyset$.

A s'écrit alors $A = U \cup f^{-1}(f(U)^c) = U \cup f^{-1}\left(\bigcup_{y \in f(U)^c} V_y\right) = U \cup \bigcup_{y \in f(U)^c} f^{-1}(V_y)$.

$\forall y \in f(U)^c$ V_y est ouvert donc par continuité de f ③ $f^{-1}(V_y)$ aussi.

On a alors un recouvrement de A par des ouverts. Par compacité ① de A il existe alors $B_0 \subset f(U)^c$ et fini tel que $A = U \cup \bigcup_{y \in B_0} f^{-1}(V_y)$.



On pose alors $V_x = \bigcap_{y \in B_0} V_x^y$.

- V_x est ouvert en tant qu'intersection finie d'ouverts
- $\forall y \in B_0$ $x \in V_x^y$ donc $x \in V_x$.

Reste à MQ $V_x \subset f(U)$. Soit $z \in f(U)^c$.

Par surjectivité de f ④ il existe $w \in A$ tel que $z = f(w)$, et puisque $z \notin f(U)$, $w \notin U$. Donc il existe $\tilde{y} \in B_0$ tel que $w \in f^{-1}(V_{\tilde{y}})$.

Alors $z = f(w) \in V_{\tilde{y}}$. Or $V_{\tilde{y}} \cap V_x^{\tilde{y}} = \emptyset$ et $V_x \subset V_x^{\tilde{y}}$ donc $z \notin V_x$.

D'où $f(U)^c \subset V_x^c$, ce qui donne $V_x \subset f(U)$.

Donc x est bien un point intérieur à $f(U)$. Puisqu'il en est de même pour tous $f(U)$ est bien ouvert. D'où f application ouverte. □

66.2 **Pté** Soient A et B deux espaces topologiques.

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ A \text{ compact} \\ \cdot\ B \text{ séparé} \\ \cdot\ f \in C^0(A,B) \text{ et bijective} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ est un homéomorphisme de } A \text{ ds } B$$

Preuve Puisque $f \in C^0(A,B)$ et bijective, il ne reste plus qu'à montrer que f^{-1} est continue. Pour distinguer $^{-1}$ de la fonction réciproque et $^{-1}$ de l'image réciproque, notons $f^{-1} = g$.
Soit U un ouvert de A

$$g^{-1}(U) = \{ b \in B \mid g(b) \in U \} \underset{\text{car } f \text{ bijective}}{=} \{ f(a) \mid a \in A \ \underbrace{g(f(a))}_{id_A} \in U \} = f(U)$$

Or toutes les conditions sont réunies pour utiliser la propriété précédente, donc f est une application ouverte et $f(U)$ est bien un ouvert de B, donc $g^{-1}(U)$ est ouvert.
Ainsi l'image réciproque par g d'un ouvert quelconque de A est ouverte, donc g est continue □

66.3 **Pté** Soient A et B deux espaces topologiques

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ compact} \\ B \text{ séparé} \\ f \in C^0(A,B) \end{array}\right\} \Rightarrow f(A) \text{ fermé dans } B$$

Preuve On cherche plutôt à MQ $f(A)^c$ est ouvert. Soit $x \in f(A)^c$.
$\forall b \in f(A)$, $b \neq x$ donc par séparation de B il existe V_b et V_x^b deux ouverts disjoints de B contenant resp. b et x.
$A = f^{-1}(f(A)) = \bigcup_{b \in f(A)} f^{-1}(V_b)$. Puisque f est continue il s'agit là d'un rec. de A par des ouverts. La compacité de A permet d'en extraire ~~les~~ sous-recouvrem^t fini $A = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(V_{b_i})$.

On pose alors $U = \bigcap_{i=1}^{n} V_x^{b_i}$. En tant qu'intersection finie d'ouverts de B, U est bien un ouvert de B. Vérifions qu'il est inclus dans $f(A)^c$.
Si $b = f(a) \in U \cap f(A)$. $a \in A$ donc il existe $i \in [1..n]$ tel que $a \in f^{-1}(V_{b_i})$.
alors $b = f(a) \in V_{b_i}$. Or par construction V_{b_i} est disjoint de $V_x^{b_i}$, donc à fortiori disjoint de U. D'où $b \in U$ impossible.
On a donc $x \in U \subset f(A)^c$ où U est ouvert, et ce pour x quelconque dans $f(A)^c$. D'où $f(A)^c$ est ouvert. Donc $f(A)$ fermé.