Propriétés de la trace.

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On note · $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ens. des matrices carrées de taille $n \times n$ à coeff dans $\mathbb{K}$
· $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

70.1 **Déf** L'application trace est $\mathrm{Tr}\left(\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (A_{i,j})_{(i,j)\in[1,n]^2} & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} A_{ii}\end{array}\right)$

70.2 **Pté** La trace est un morphisme d'espaces vectoriels entre $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, .)$ et $(\mathbb{K}, +, .)$.
En particulier $\begin{cases} \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \quad \mathrm{Tr}(\lambda A+B) = \lambda \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B) \\ \mathrm{Tr}(0) = 0 \end{cases}$ Rq. $\mathrm{Tr}(I_n) = n$.

Preuve - $\mathrm{Tr}(\lambda A+B) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda A+B)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda A_{ii} + B_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^{n} A_{ii} + \sum_{i=1}^{n} B_{ii}$
$= \lambda \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$.
· $\mathrm{Tr}(0) = \sum_{i=1}^{n} 0_{ii} = \sum_{i=1}^{n} 0 = 0$.
· $\mathrm{Tr}(I_n) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ii} = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$
Rq Ce ne peut-être un iso car $\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$ mais $\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix} \neq 0$.

70.3 **Pté** Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ $\quad \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$

Preuve $\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} B_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} B_{k,i} A_{i,k}$
$= \sum_{k=1}^{n} (BA)_{kk} = \mathrm{Tr}(BA)$.

10.4 **Pté** $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad Tr(A) = Tr({}^tA)$ (a)

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad Tr(\bar{A}) = \overline{Tr(A)}$ dc $Tr(A^*) = \overline{Tr(A)}$ (b)

Preuve · $\forall i \in [1..n] \quad (A)_{ii} = ({}^tA)_{ii}$ donc $\sum_{i=1}^{n} A_{ii} = \sum_{i=1}^{n} ({}^tA)_{ii}$.

· $Tr(\bar{A}) = \sum_{i=1}^{n} \bar{A}_{ii} = \overline{\sum_{i=1}^{n} A_{ii}} = \overline{Tr(A)}$.