88

Opérations sur les vecteurs gaussiens

Soit $(n,d) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit $M \in \mathbb{R}^d$. Soit $V \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ symétrique, définie, positive.

88.1 **Pté** • $X \sim \mathcal{N}_d(M,V) \Rightarrow V^{-1/2}(X-M) \sim \mathcal{N}_d(0, I_d)$ (a)

88.2 • $\forall U \in \mathbb{R}^d$, $\forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ symétrique, définie, positive

$$X \sim \mathcal{N}_d(0, I_d) \Rightarrow AX+U \sim \mathcal{N}_d(M, AA') \quad (b)$$

88.3 d'où $X \sim \mathcal{N}_d(M,V) \Leftrightarrow V^{-1/2}(X-M) \sim \mathcal{N}_d(0, I_d)$

"Le vecteur centré réduit d'une loi normale quelconque suit la loi standard".

Soit $(a_k, b_k)_{k \in [1..d]} \in (\mathbb{R}^2)^d$ ainsi $\mathcal{P} = \prod_{k=1}^{d} [a_k, b_k]$ est un pavé de $\mathbb{R}^d$.

a) $\mathbb{P}(V^{-1/2}(X-M) \in \mathcal{P}) = \int_{\mathbb{R}^d} f_X(x) \, \mathbb{1}(V^{-1/2}(X-M) \in \mathcal{P}) \, dx$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\sqrt{\det V}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \exp^{-\frac{1}{2}(x-M)'V^{-1}(x-M)} \mathbb{1}(V^{-1/2}(X-M) \in \mathcal{P}) \, dx$$

On pose le changement de variable $z = V^{-1/2}(x-M)$ de Jacobien $\det(V^{-1/2}) = \frac{1}{\sqrt{\det V}}$

ainsi $(x-M)'V^{-1}(x-M) = (x-M)'V^{-1/2} \times V^{-1/2}(x-M) = z'z$ car $V^{-1/2} = V^{-1/2}{}'$

donc $\mathbb{P}(V^{-1/2}(X-M) \in \mathcal{P}) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \exp^{-1/2\, z'z} \, \mathbb{1}(z \in \mathcal{P}) \, dz$

$$= \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_d}^{b_d} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d} \frac{1}{\sqrt{\det I_d}} \exp^{-1/2 (z-0)' I_d (z-0)} dz_1 \, dz_2 \ldots dz_d$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_1}^{b} f_{\mathcal{N}_d(0, I_d)}(z) \, dz_1 \, dz_2 \ldots dz_d$$

$$= \mathbb{P}(\text{"}\mathcal{N}_d(0, I_d)\text{"} \in \mathcal{P})$$

d'où $V^{-1/2}(X-M) \sim \mathcal{N}_d(0, I_d)$.

b) $\mathbb{P}(AX+M \in \mathcal{P}) = \mathbb{P}(AX \in \prod_{k=1}^{d} [a_k - m_k, b_k - m_k]) = \mathbb{P}(X \in A^{-1}(\prod_{k=1}^{d} [a_k - m_k, b_k - m_k]))$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} e^{-1/2\, x'x} \, \mathbb{1}(x \in A^{-1}(\prod_{k=1}^{d} [a_k - m_k, b_k - m_k])) \, dx$$

On pose $y = Ax + m$ alors $x = A^{-1}(y-m)$. donc

$x \in A^{-1}(\prod_{k=1}^{d} [a_k - m_k, b_k - m_k]) \Leftrightarrow y - m \in \prod_{k=1}^{d} [a_k - m_k, b_k - m_k] \Leftrightarrow y \in \prod_{k=1}^{d} [a_k, b_k] \Leftrightarrow y \in \mathcal{P}$.

de plus $x'x = (y-m)'(A^{-1})' A^{-1}(y-m) = (y-m)' (A'A)^{-1} (y-M)$

Le Jacobien associé à ce changem^t de variable est A donc $\frac{1}{|\det A|}$ "dy" $\Leftrightarrow$ "dx"

$$\mathbb{P}(AX+M \in P) = \int_P \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} e^{(y-m)'(A'A)^{-1}} \frac{1}{|\det A|} dy.$$