Fonctions semi-continues inférieurement

Soit E un espace

On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

89.1 **Déf** Soit $f \in \mathcal{F}(E, \overline{\mathbb{R}})$

L'épigraphe de f, noté épi(f), est $\{(x,\alpha) \in E \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq \alpha\}$

89.2 **Déf** Soit $f \in \mathcal{F}(E, \overline{\mathbb{R}})$

Le sous-niveau ou la section inférieure de f, à hauteur α, noté $\mathrm{lev}_{\leq \alpha}(f)$ est $\{x \in E \mid f(x) \leq \alpha\}$ c-à-d $f^{-1}([\alpha, +\infty])$

89.3 **Déf** Soit $f \in \mathcal{F}(E, \overline{\mathbb{R}})$. Soit $x \in E$

- f est semi-continue inférieurement en x
  $\Leftrightarrow$ toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E convergeant vers x vérifie, $f(x) \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} (f(x_n))$.

- f est semi-continue inférieurement $\Leftrightarrow$ elle l'est en tout point de E.

89.4 **Pté** Soit $f \in \mathcal{F}(E, \overline{\mathbb{R}})$

f est s.c.i $\Leftrightarrow$ épi(f) est fermée $\Leftrightarrow$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\mathrm{lev}_{\leq\alpha}(f)$ est fermé

Preuve (i) $\Rightarrow$ (ii). Supposons que f soit s.c.i

Soit $((x_n, \xi_n))_{n\in\mathbb{N}} \in$ épi$(f)^{\mathbb{N}}$ une suite convergeante.

Notons (x, ξ) sa limite (donc $x_n \xrightarrow{n\to+\infty} x$ et $\xi_n \longrightarrow \xi$)

- $\forall n \in \mathbb{N}$ $(x_n, \xi_n) \in$ épi(f) donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) \leq \xi_n$
  donc $\liminf\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} (\xi_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} (\xi_n) = \xi$ car $\xi_n \to \xi$
- Puisque f est sci, donc sci en x, on a $f(x) \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} (f(x_n))$

d'où finalement $f(x) \leq \xi$ et $(x, \alpha) \in \text{épi}(f)$. Ainsi épi$(f)$ est bien fermé

- (ii) $\Rightarrow$ (iii). Supposons que épi(f) est fermé. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
  Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\text{lev}_{\leq\lambda}(f))^{\mathbb{N}}$.
  - $\forall n \in \mathbb{N}$ $f(x_n) \leq \lambda$; donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $(x_n, \lambda) \in \text{épi}(f)$. Par hypothèse épi$(f)$ est fermée or $(x_n, \lambda) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (x, \lambda)$, donc $(x, \lambda) \in \text{épi}(f)$ soit $f(x) \leq \lambda$, soit $x \in \text{lev}_{\leq\lambda}(f)$. Ainsi $\text{lev}_{\leq\lambda}(f)$ est bien fermé, et ce pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (iii) $\Rightarrow$ (i). Supposons que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\text{lev}_{\leq\lambda}(f)$ est fermé.

Soit $x \in \mathcal{E}$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers x.

Notons $\mu = \liminf\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$.

μ étant la plus petite valeur d'adhérence de $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ il existe φ une extraction telle que $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers μ.

Donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N \Rightarrow f(x_{\varphi(n)}) \leq \mu + \varepsilon$

donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N \Rightarrow x_{\varphi(n)} \in \text{lev}_{\mu+\varepsilon}(f)$ fermé par hypothèse

donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $(x_{\varphi(n)})_{n\geq N} \in \text{lev}_{\mu+\varepsilon}(f)$ et $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$

donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ $x \in \text{lev}_{\mu+\varepsilon}(f)$ soit $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ $f(x) \leq \mu + \varepsilon$

donc nécessairement $f(x) \leq \mu$ soit $f(x) \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} (f(x_n))$.

Puisque cela est vrai pour toute suite convergeant vers x on en déduit que f est s.c.i en x, et donc s.c.i sur $\mathcal{E}$.

D'où les équivalences annoncées.