Théorème de Weierstraß

9.1 **Théorème de Weierstraß** || Toute fonction continue d'un segment de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est limite uniforme de fonctions polynomiales

Preuve Notons $[a,b]$ le segment en question. C'est un compact (pour $|\,|$)
Notons P l'ensemble des fonctions polynomiales de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
$P \subset \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ et le résultat énoncé équivaut à P dense dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$
on cherche alors à utiliser le théorème de Stone-Weierstraß.
-> P est une algèbre (car $\mathbb{R}[X]$ en est une)
-> P contient les constantes (car $\mathbb{R}[X]$ contient les polynômes cst)
-> P sépare les points de $[a,b]$, en effet $id: x \mapsto x$ sépare point et $\in P$.
Donc P dense dans $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ (naturellement muni de la norme uniforme) donc on a le résultat.

9.2 Rq Si l'on énonce le th de Weierstraß comme corollaire de celui de Stone-Weierstraß il faut bien l'avoir démontré en utilisant le corollaire du th. de Dini pour justifier la stabilité par valeur absolue, et non en utilisant le th de Weierstraß !
On peut cependant choisir cette deuxième option si l'on opte pour une autre démonstration du th de Weierstraß, comme celle à l'aide des polynômes de Berstein que l'on va faire ci-après car elle a le bon goût d'être constructive c'est à dire qu'elle donne une suite de f° polynomiales approchant notre f° continue.

9.3 **Pté** Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.
La suite des polynômes de Berstein associée est $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
Alors f est limite uniforme des $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Preuve On va ici faire une preuve à base de probabilité.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in [0,1]$.

$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \times \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$

On introduit alors $g_n = \begin{pmatrix} [0,1] \to \mathbb{R} \\ z \longmapsto f\left(\frac{z}{n}\right) \end{pmatrix}$ et Y_n une va de loi la loi binomiale de paramètres x et n. Alors on réécrit

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} g_n(k) \times \mathbb{P}(Y_n = k)$$
$$= \mathbb{E}\left[g_n(Y_n)\right] \quad \text{formule de transfert} \quad = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{Y_n}{n}\right)\right].$$

Or on sait qu'une variable suivant $\mathcal{B}(x,n)$ s'écrit comme la somme de n v.a. iid de loi Bernoulli de paramètre x.

On écrit alors $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_i$ où les X_i sont $\perp\!\!\!\perp$ et $X_i \sim \mathcal{B}(x)$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. On cherche à MQ $\|B_n - f\|_\infty < \varepsilon$ pour n assez grand.

Par continuité de f sur $[0,1]$ compact, on a l'unif. continuité de f et il existe alors $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\forall z \in [0,1]$, $\forall y \in [0,1]$ $|y - z| \leq \alpha \Rightarrow |f(y) - f(z)| \leq \varepsilon/2$.

Rq ⚠ Dans le calcul ci-contre la def des X_n et Y_n est relative à x. On se défait de cette dép. en x grâce à la majoration $\boxed{x(1-x) \leq \frac{1}{4}}$

$$\forall x \in [0,1] \quad |B_n(x) - f(x)| = \left|\mathbb{E}\left[f\left(\frac{Y_n}{n}\right)\right] - f(x)\right| = \left|\mathbb{E}\left[f\left(\frac{Y_n}{n}\right) - f(x)\right]\right|$$
$$\leq \mathbb{E}\left[\left|f\left(\frac{Y_n}{n}\right) - f(x)\right|\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\underbrace{\left|f\left(\frac{Y_n}{n}\right) - f(x)\right|}_{\leq \varepsilon/2 \text{ car } \left|\frac{Y_n}{n} - x\right| < \alpha} \mathbb{1}_{\left|\frac{Y_n}{n} - x\right| < \alpha}\right] + \mathbb{E}\left[\underbrace{\left|f\left(\frac{Y_n}{n}\right) - f(x)\right|}_{\leq 2\|f\|_\infty} \times \mathbb{1}_{\left|\frac{Y_n}{n} - x\right| \geq \alpha}\right]$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\mathbb{P}\left(\left|\frac{Y_n}{n} - x\right| < \alpha\right)}_{\leq 1} + 2\|f\|_\infty \underbrace{\mathbb{P}\left(\left|\frac{Y_n}{n} - x\right| \geq \alpha\right)}_{\leq \frac{\mathbb{V}\left[\frac{Y_n}{n} - x\right]}{\alpha^2}} \quad \text{Tchebychaff.}$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2\|f\|_\infty}{\alpha^2} \mathbb{V}\left[\frac{Y_n}{n} - x\right]$$

Or $\mathbb{V}\left[\frac{Y_n}{n} - x\right] = \mathbb{V}\left[\frac{Y_n}{n}\right] = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}[Y_n] = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}[X_i]$ car X_i $\perp\!\!\!\perp$

$\mathbb{V}[X_1] = x(1-x)$ car $X_i \sim \mathcal{B}(x)$

$= \frac{1}{n} x(1-x) \leq \frac{1}{n} \times \frac{1}{4}$ (car $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ sur $[0,1]$)

Donc $\forall n \geq \frac{\|f\|_\infty}{\alpha^2 \varepsilon}$, $\forall x \in [0,1]$ $|B_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 + \underbrace{\frac{2}{4} \frac{\|f\|_\infty}{\alpha^2} \times \frac{1}{n}}_{\leq \varepsilon} \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

Donc $\forall n \geq \frac{\|f\|_\infty}{\alpha^2 \varepsilon}$ $\|B_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$.

D'où $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cv. unif vers f.