Espaces topologiques séparés, réguliers, normaux

Déf. Soit (X, Θ) un espace topologique. Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble de ses fermés.

90.1 • (X, Θ) est <u>séparé</u> $\Leftrightarrow \forall (x,y) \in X^2,\ x \neq y \Rightarrow \exists (U,V) \in \Theta^2,\ x \in U,\ y \in V,\ U \cap V = \emptyset$

90.2 • (X, Θ) est <u>régulier</u> $\Leftrightarrow \forall x \in X,\ \forall F \in \mathcal{F},\ x \notin F \Rightarrow \exists (U,V) \in \Theta^2,\ x \in U,\ F \subset V,\ U \cap V = \emptyset$

90.3 • (X, Θ) est <u>normal</u> $\Leftrightarrow \forall (F_1, F_2) \in \mathcal{F}^2,\ F_1 \cap F_2 = \emptyset \Rightarrow \exists (U,V) \in \Theta^2,\ F_1 \subset U,\ F_2 \subset V,\ U \cap V = \emptyset$

90.4 **lemme** Soit (X, Θ) un espace topologique. Soit
$$\forall (U,V) \in \Theta^2,\quad U \cap V = \emptyset \Rightarrow \overline{U} \cap V = \emptyset$$

Preuve : $U \cap V = \emptyset$ donne $U \subset V^c$. Ainsi V^c est un fermé contenant U.
Or par définition de l'adhérence, $\overline{U}$ est le plus petit.
Donc $\overline{U} \subset V^c$ soit $\overline{U} \cap V = \emptyset$.

Pté Soit (X, Θ) un espace topologique. Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble de ses fermés

90.5 (X, Θ) est régulier $\Leftrightarrow \forall x \in X,\ \forall U \in \Theta,\ x \in U \Rightarrow \exists V \in \Theta,\ x \in V \subset \overline{V} \subset U$ $(\star_1)$

90.6 (X, Θ) est normal $\Leftrightarrow \forall F \in \mathcal{F},\ \forall U \in \Theta,\ F \subset U \Rightarrow \exists V \in \Theta.\ F \subset V \subset \overline{V} \subset U.$ $(\star_2)$

Preuve $\overset{a}{\Rightarrow}$. Supposons (X, Θ) régulier. Soit $x \in X$, Soit $U \in \Theta$ tel que $x \in U$
Par régularité et puisque x appartient au fermé U^c, il existe $(U', V') \in \Theta^2$ tels que $x \in U',\ U^c \subset V',\ U' \cap V' = \emptyset$.
D'après le lemme on a donc aussi $\overline{U'} \cap V' = \emptyset$ soit $\overline{U'} \subset V'^c$.
Or $U^c \subset V'$ donne $V'^c \subset U^{cc} = U$ donc $\overline{U'} \subset U$
On a bien $x \in U' \subset \overline{U'} \subset U$. CQFD.

$\overset{a}{\Leftarrow}$ Supposons vraie $\star_1$. Soit $x \in X$. Soit $F \in \mathcal{F}$ tel que $x \notin F$.
Alors x appartient à l'ouvert F^c donc par l'hyp. $\star_1$ il existe $V \in \Theta$ tel que $x \in V \subset \overline{V} \subset F^c$, soit $F \subset \overline{V}^c = \mathring{V^c}$
et $V \cap \mathring{V^c} = \emptyset$ car $V \cap V^c = \emptyset$ et $\mathring{V^c} \subset V^c$.
En résumé $x \in V$, $F \subset \mathring{V^c}$, $V \cap \mathring{V^c} = \emptyset$ et $(V, \mathring{V^c}) \in \Theta$.
On a bien la régularité.

$\overset{b}{\Rightarrow}$ Supposons X normal. Soit $F \in \mathcal{F}$. Soit $U \in \Theta$ tel que $F \subset U$.
U^c est fermé et $F \cap U^c = \emptyset$ donc par normalité de X il existe $(U', V') \in \Theta^2$ tel que $F \subset U'$, $U^c \subset V'$ et $U' \cap V' = \emptyset$
D'après le lemme $\overline{U'} \cap V' = \emptyset$ soit $V' \subset \overline{U'}^c$ donc $U^c \subset \overline{U'}^c$
En passant au complémentaire $\overline{U'} \subset U$.
Ainsi on a $F \subset U' \subset \overline{U'} \subset U$. CQFD.

$\overset{b}{\Leftarrow}$ Réciproquement supposons $\star_2$ vraie.
Soit $(F_1, F_2) \in \mathcal{F}^2$ tel que $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. On a alors $F_1 \subset F_2^c$
et $F_2^c \in \Theta$ donc d'après $\star_2$ il existe $U \in \Theta$ tel que $F_1 \subset U \subset \overline{U} \subset F_2^c$
$\overline{U} \subset F_2^c$ donne $F_2 \subset \overline{U}^c = \mathrm{int}(U^c)$ et $\mathrm{int}(U^c) \in \Theta$, enfin $U \cap \mathrm{int}(U^c) = \emptyset$
D'où la normalité de X.

90.7 Pté normal $\Rightarrow$ régulier $\Rightarrow$ séparé