Théorème de prolongement.

Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques. Soit $A \in \mathcal{P}(X)$

91.0 **Rappels** · A est dense dans X $\Leftrightarrow$ $\bar{A} = X$

$\Leftrightarrow$ $\forall x \in X, \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, \ a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$.

· Soit $f \in \mathcal{F}(X, Y)$

f est uniformément continue $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \eta \in \mathbb{R}^{+*}, \forall (x, x') \in X^2, d(x, x') \leq \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(x')) \leq \varepsilon$

91.1 **lemme 1** Soit $f \in \mathcal{F}(X, Y)$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$.

$\left.\begin{array}{l} f \text{ unif. continue} \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est de Cauchy} \end{array}\right\} \Rightarrow (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy (de (Y, δ))

"L'image unif. continue d'une suite de Cauchy est aussi de Cauchy"

Preuve Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$.

Par unif. continuité de f, il existe $\eta \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\forall (x, x') \in X^2, d(x, x') \leq \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(x')) \leq \varepsilon$.

Puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tq $\forall p \geq q \geq N, d(x_p, x_q) \leq \eta$.

Donc $\forall p \geq q \geq N \quad \delta(f(x_p), f(x_q)) \leq \varepsilon$.

Donc $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bien de Cauchy

91.2 **lemme 2** Soit $(f, g) \in \mathcal{F}(X, Y)^2$.

f et g sont continues $\Rightarrow \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ est fermé

Preuve: On introduit $\varphi = \left(\begin{array}{l} X \to Y \times Y \\ x \mapsto (f(x), g(x)) \end{array}\right)$.

On munit $Y \times Y$ de la distance du max, qu'on note D_1.

Soit $x \in X$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. Par continuités resp de f et g il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{+*}$

tel que $\forall z \in X \quad d(x, z) \leq \alpha \Rightarrow \delta(f(x), f(z)) \leq \varepsilon$

$\forall z \in X \quad d(x, z) \leq \beta \Rightarrow \delta(g(x), g(z)) \leq \varepsilon$

On pose $\gamma = \min(\alpha, \beta)$ ainsi

$$\forall z \in X,\ d(x,z) \leq \gamma \Rightarrow \delta(f(x), f(z)) \leq \varepsilon \text{ et } \delta(g(x), g(z)) \leq \varepsilon$$
$$\Rightarrow D_1((f(x), g(x)), (f(z), g(z))) \leq \varepsilon$$
$$\Rightarrow D_2(\varphi(x), \varphi(z)) \leq \varepsilon.$$

Ainsi φ est bien continue, de (X,d) dans $(Y\times Y, D_1)$.
Par ailleurs on introduit $\Delta = \{(y,y) \mid y \in Y\} \subset Y\times Y$.
On montre qu'il est fermé. Soit $(a_n, b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Delta^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $(a,b) \in Y\times Y$.
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \varepsilon \geq D_1((a,b),(a_n,b_n)) \geq d(a,a_n)$. Donc $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.
De même $b_n \to b$. Or $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n = b_n$ car $(a_n, b_n) \in \Delta$. Par unicité de la limite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a $a = b$ donc $(a,b) \in \Delta$. Donc Δ est fermé.
Enfin $\{x \in X \mid g(x) = f(x)\} = \varphi^{-1}(\Delta)$, et en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue, c'est un fermé !

91.3 **Théorème de prolongement** Soit $A \in \mathcal{P}(X)$. Soit $f \in \mathcal{F}(A, Y)$.

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ est dense dans } X \\ (Y,\delta) \text{ est complet} \\ f \text{ unif continue}_{\ (\text{de } A,\, d_{/A\times A})\text{ ds }(Y,\delta)} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists!\, \tilde{f} \in \mathcal{F}(X,Y),\ \tilde{f}_{/A} = f \text{ et } \tilde{f} \text{ unif continue}.$$

Preuve Montrons d'abord l'unicité.
Supposons qu'il existe $\tilde{f}$ et $\hat{f}$ prolongeant f et unif. continues.
$\tilde{f}_{/A} = \hat{f}_{/A} = f$ donc $A \subset \{x \in X \mid \hat{f}(x) = \tilde{f}(x)\}$ qui est fermé d'après le lemme 2.
Donc $X = \bar{A} \subset \overline{\{x \in X \mid \hat{f}(x) = \tilde{f}(x)\}} = \{x \in X \mid \hat{f}(x) = \tilde{f}(x)\}$.
Autrem^t dit $\forall x \in X$ $\hat{f}(x) = \tilde{f}(x)$ soit $\hat{f} = \tilde{f}$ d'où l'unicité.

Montrons maintenant l'existence en construisant $\tilde{f}$.
Soit $x \in X$. Par densité de A il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ tq $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$.
En tant que suite convergeante $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
On en déduit, d'après le lemme 1, que $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est elle aussi de Cauchy, et, par complétude de (Y,δ), convergente.
On pose alors $\tilde{f}(x) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n)$.

Si $x \in A$, la continuité de f en x assure que $\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = f(x)$ soit $\tilde{f}(x) = f(x)$. Ainsi $\tilde{f}$ est bien un prolongement de f.
Vérifions enfin que $\tilde{f}$ est uniformément convergente.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. Par unif. continuité de f il existe $\eta \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que
$\forall (a, a') \in A^2 \; d(a, a') \leq \eta \Rightarrow \delta(f(a), f(a')) \leq \varepsilon/3$.
Soit $(x, x') \in X^2$ tel que $d(x, x') \leq \eta/3$.
Quitte à piocher dans les suites qui ont permis la construction de $\tilde{f}(x)$ et $\tilde{f}(x')$ il existe $(a, a') \in A^2$ tel que $d(a, x) \leq \eta/3$, $d(a', x') \leq \eta/3$
et $\delta(f(a), f(x)) \leq \varepsilon/3$, $\delta(f(a'), f(x')) \leq \varepsilon/3$.
Alors $\delta(f(x), f(x')) \leq \underbrace{\delta(f(x), f(a))}_{\leq \varepsilon/3} + \delta(f(a), f(a')) + \underbrace{\delta(f(a'), f(x'))}_{\leq \varepsilon/3}$

or $d(a, a') \leq d(a, x) + d(x, x') + d(x', a') \leq /3 + /3 + /3 =$
donc $\delta(f(a), f(a')) \leq \varepsilon/3$ et finalem^t $\delta(f(x), f(x')) \leq \varepsilon$.
Donc $\tilde{f}$ est bien uniformément continue.