Mémoire de Master 2 à l'Université de Rennes 1

Leçon 143 - Convergence des séries entières, propriétes de la somme. Exemples et applications

Anne-Elisabeth FALQ
École Normale Supérieure de Rennes & Université de Rennes 1

Encadrant : Bachir Bekka

2015-2016

A.Plan 2

1 Définitions et propriétés élémentaires 2
1.1 Rayon de convergence . . . 2
1.2 Détermination du rayon de convergence . . . 3

2 Opérations sur les séries entières 4
2.1 Somme et produit . . . 4
2.2 Dérivation et intégration dans le cas réel . . . 4

3 Questions de continuité 5
3.1 Continuité sur le disque ouvert de convergence . . . 5
3.2 Comportement au bord . . . 5

4 Lien entre holomorphie et analyticité 6
4.1 Holomorphie . . . 6
4.2 Analyticité . . . 6
4.3 Équivalence entre analyticité et holomorphie . . . 7

5 Applications courantes 7
5.1 A la combinatoire . . . 7
5.2 Aux équations différentielles . . . 8

B.Développements 9
Théorème d'Abel angulaire et théorèmes taubériens . . . 9
Théorème des lacunes d'Hadamard . . . 12

C.Exercices et questions 15

D.Bibliographie 17

A. Plan

1 Définitions et propriétés élémentaires

Considérons $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes et $z_0 \in \mathbb{C}$.

Définition 1.1

*La **série entière** de coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à variable complexe est la série des fonctions* $f_n = \begin{pmatrix} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & a_n z^n \end{pmatrix}$.

1.1 Rayon de convergence

[G]p236

Propriété 1.2 (*Lemme d'Abel*)

Si $(a_n {z_0}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors la série $\sum a_n z^n$ converge absolument pour $z \in \mathcal{B}(0,|z_0|)$, et elle converge normalement sur tout compact $K \subset \mathcal{B}(0,|z_0|)$.

Corollaire 1.3

$\sup\{|z| \,|\, z\in\mathbb{C},\ \sum a_n z^n \text{ converge absolument}\} = \sup\{|z| \,|\, z\in\mathbb{C},\ \sum a_n z^n \text{ converge}\} = \sup\{|z| \,|\, z\in\mathbb{C},\ (a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\} = \sup\left\{|z| \,|\, z\in\mathbb{C}, a_n z^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\right\}$

Définition 1.4

*On appelle alors **rayon de convergence** ce suprémum, on le notera classiquement R.*

Définition 1.5

*Si R>0 on appelle **disque (ouvert) de convergence** la boule centrée en 0 et de rayon r.*
*Dans ce cas la **somme de la série entière** est la fonction* $f = \begin{pmatrix} \mathcal{B}(0,R) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \sum a_n z^n \end{pmatrix}$.

Exemple 1.6

* *Pour* $\sum \frac{1}{n!} z^n \quad R = +\infty \quad$ *car* $\quad \forall z\in\mathbb{C} \quad \frac{|z^n|}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

* *Pour* $\sum \frac{1}{n} z^n \quad R = 1 \quad$ *car* $\quad \forall z\in\mathbb{C} \quad |z|<1 \Rightarrow |z|^n/n \leqslant 1$ *mais* $(1/n)$ *diverge.*

* *Pour* $\sum n! z^n \quad R = 0 \quad$ *car* $\quad \forall z\in\mathbb{C} \quad n!|z^n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$

Propriété 1.7

On a : $(|z|<R \Rightarrow \sum a_n z^n$ *converge absolument)* et $(\sum a_n z^n$ *converge* $\Rightarrow |z| \leqslant R)$
$(|z|>R \Rightarrow \sum a_n z^n$ *diverge grossièrement)* et $(\sum a_n z^n$ *diverge* $\Rightarrow |z| \geqslant R)$

Propriété 1.8

Pour $R \in \mathbb{R}^{+*}$, la convergence absolue de la série en un point du cercle $\mathcal{C}(0,R)$ entraine la convergence absolue sur tout le cercle.

Δ ! 1.9

La convergence en un point du cercle n'entraine pas la convergence en tout point du cercle.
Exemple : $\sum \frac{1}{n} z^n$ *converge en (-1) par critère spécial des séries alternées mais diverge en 1. R=1.*

1.2 Détermination du rayon de convergence

[G] p237
[AM] p69

Notons R_a, respectivement R_b les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.

Propriété 1.10

Si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $R_a = R_b$.
Si $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leqslant |b_n|$, alors $R_a \geqslant R_b$.
Si $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| = \lambda |b_n|$ où $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $R_a = R_b$.

Convention : on notera $1/0$ pour ∞ et $1/\infty$ pour 0.

Propriété 1.11 (*Règle de D'Alembert*)

Si $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$, alors $R = 1/l$

Exemple 1.12

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la série $\sum n^\alpha z^n$ a pour rayon $R = 1$ car $\left(\frac{n^\alpha}{n+1^\alpha}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$

Propriété 1.13 (*Règle de Cauchy*)

Si $|a_n|^{1/n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$, alors $R = 1/l$

Exemple 1.14

Pour $a_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ pair} \\ 2 \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$ on a $|a_n|^{1/n} = \begin{cases} 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \text{ si } n \text{ pair} \\ \sqrt[n]{2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$ donc $R = 1$

Remarque 1.15

Dans cet exemple $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \begin{cases} 2 \text{ si } n \text{ pair} \\ \frac{1}{2} \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$ donc ne converge pas.
La règle de D'Alembert ne permettait donc pas de conclure. Mais quand la règle de D'Alembert s'applique celle de Cauchy aussi, et donne bien sûr le même résultat.

Propriété 1.16 (*Règle d'Hadamard*)

Si on note $l = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$, alors $R = 1/l$.

Exemple 1.17

Pour $a_n = e^{n\cos(n)}$, on a $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} e^{\cos(n)} = e$, donc $R = 1/e$.

Remarque 1.18

Dans cet exemple $|a_n|^{1/n} = e^{\cos(n)}$ ne converge pas.
La règle de Cauchy ne permettait donc pas de conclure. Mais quand la règle de Cauchy s'applique celle d'Hadamard aussi, et donne bien sûr le même résultat.

Remarque 1.19

Pour une série de la forme $\sum a_n z^{kn}$ où $k \in \mathbb{N}$ il faut adapter la règle de Cauchy. En effet si $|a_n|^{1/n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$, alors $R = \sqrt[k]{\frac{1}{l}}$.

2 Opérations sur les séries entières

[G] p237

2.1 Somme et produit

Définition 2.1

*La **somme** des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la série $\sum (a_n + b_n) z^n$.*

Propriété 2.2

Si R est le rayon de convergence de $\sum (a_n + b_n) z^n$ alors on a :
* $R \leqslant min(R_a, R_b)$
* *Si $R_a \neq R_b$, alors $R = min(R_a, R_b)$*
* *Pour tout $z \in \mathcal{B}(0, min(R_a, R_b))$, on a $\sum (a_n + b_n) z^n = \sum a_n z^n + \sum b_n z^n$*

Exemple 2.3

Pour $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante égale à 1 et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante égale à -1, $R_a = R_b = 1$ mais $R = +\infty$ car $\sum (a_n + b_n) z^n = 0$ quel que soit $z \in \mathbb{C}$.

Définition 2.4

*Le **produit** des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la série $\sum c_n z^n$ où $\forall n \in \mathbb{N}$ $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.*
Il s'agit d'un produit de Cauchy point à point.

Propriété 2.5

Si R est le rayon de convergence de $\sum c_n z^n$, alors on a :
* $R \leqslant min(R_a, R_b)$
* *Pour tout $z \in \mathcal{B}(0, min(R_a, R_b))$, on a $\sum (a_n + b_n) z^n = \sum a_n z^n$ x $\sum b_n z^n$*

Δ ! 2.6

Avoir $R_a \neq R_b$ ne permet pas de conclure dans le cas du produit.
Par exemple pour $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \begin{cases} 2 \text{ si } n \text{ pair} \\ 2^n \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \begin{cases} -1 \text{ si } n \text{ pair} \\ 1 \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$
on a $R_a = 0$ et $R_b = +\infty$, donc $R_a \neq R_b$, pourtant $R = \infty$.

2.2 Dérivation et intégration dans le cas réel

[G] p238

Supposons $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et considérons s sa somme restreinte à l'axe réel c'est à dire $s = \begin{pmatrix}]-R, R[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \text{x} & \longmapsto & \sum a_n x^n \end{pmatrix}$.

Propriété 2.7

La somme s est $\mathcal{C}^\infty$ et $\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in]-R, R[$ $s^{(p)} = \sum\limits_{n=p}^{\infty} \frac{n!}{(n-p)!} x^{n-p}$.
Autrement dit la dérivation agit terme à terme.

Corollaire 2.8

Les coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont uniques et s'obtiennent par $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_p = \frac{s^{(p)}(0)}{p!}$

Remarque 2.9

Le fait qu'une série entière et sa série dérivée aient le même rayon de convergence est une conséquence direct de la règle d'Hadamard.

Application 2.10

$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]-1, 1[$ $\frac{1}{(1-x)^p} = \sum\limits_{n=p}^{\infty} \binom{n-p-1}{p-1} x^n$ s'obtient en dérivant p fois $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$.

Propriété 2.11

Pour tout $x \in]-R,R[$ *on a* $\int_0^x s(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$

Application 2.12

$* \forall x \in]-1,1[\quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ *s'obtient en intégrant* $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$.

$* \forall x \in]-1,1[\quad \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ *s'obtient en intégrant* $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$.

3 Questions de continuité

Supposons $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et considérons sa somme
$f = \begin{pmatrix} \mathcal{B}(0,R) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \sum a_n z^n \end{pmatrix}$

3.1 Continuité sur le disque ouvert de convergence

Propriété 3.1

La somme f est uniformément continue sur tout compact $K \subset \mathcal{B}(0,R)$ et continue sur le disque ouvert de convergence $\mathcal{B}(0,R)$.

[G] p238

Δ ! 3.2

A priori la somme n'est pas uniformément convergente sur $\mathcal{B}(0,R)$.
Par exemple $x \mapsto \frac{1}{1-x} = \sum x^n$ n'est pas uniformément continue sur $[0,1[$

Corollaire 3.3 (*Principe des zéros isolés*)

Si 0 est point d'accumulation des zéros de f, alors f est nulle.

[G] p239

3.2 Comportement au bord

Pour parler du cercle du convergence, le bord du disque de convergence, on se place sous l'hypothèse $R \neq +\infty$ (en plus de l'hypothèse $R > 0$). Pour simplifier on ira même ici jusqu'à supposer $R = 1$, bien que les résultats soient vrais pour R quelconque dans $\mathbb{R}^{+*}$.

Propriété 3.4 (*Théorème d'Abel angulaire*)

On pose pour $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$ le domaine $\Delta_{\theta_0} = \{1 - \rho e^{i\theta} \mid \rho \in \mathbb{R}^{+*}, \theta \in [-\theta_0, \theta_0], |1 - \rho e^{i\theta}| < 1\}$.
Si $\sum a_n$ converge vers S alors $\forall \theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[\ \lim_{z \to 1, z \in \Delta_{\theta_0}} f(z) = S$.

[G] p252

Remarque 3.5

Ce domaine angulaire est nécessaire. Si on enlève la condition $z \in \Delta_{\theta_0}$, on n'a plus nécessairement la convergence.

Exemple 3.6

Considérons la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+1} z^{M_n}$ où $\forall n \in \mathbb{N} \ M_n = \begin{cases} 2 \times 3^k & si\ n = 2k \\ 3^{k+1} & si\ n = 2k+1 \end{cases}$. On a bien $R = 1$.
Comme $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge l'hypothèse est bien vérifiée.
Mais on peut construire $(r_k)_{k \in \mathbb{N}} \in]0,1[^{\mathbb{N}}$ telle que $f(r_k\, e^{i\pi 3^{-k}}) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors que $r_k\, e^{i\pi 3^{-k}} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

Corollaire 3.7 (*Convergence radiale*)

Si $\sum a_n$ converge alors on peut prolonger f de manière uniformément continue sur $[0,1]$.

[x-ens,an2] p252

⚠ ! 3.8

La réciproque est fausse ! Considérons $f = z \mapsto \frac{1}{1+z} = \sum(-1)^n z^n$. On peut la prolonger en 1 par $1/2$, elle est alors uniformément continue sur $[0,1]$ puisque $z \mapsto \frac{1}{1+z}$ l'est. Pourtant $\sum(-1)^n$ qui vaut alternativement 1 et 0 ne converge pas.

Propriété 3.9 (*Théorème taubérien faible*)

Si $\lim\limits_{z\to 1, z\in]0,1[} f(z) = S$ et $a_n = o(\frac{1}{n})$, alors $\sum a_n$ converge vers S.

[G]p253

Propriété 3.10 (*Théorème taubérien fort*)

Si $\lim\limits_{z\to 1, z\in]0,1[} f(z) = S$ et $a_n = O(\frac{1}{n})$, alors $\sum a_n$ converge vers S.

[G]p289

Remarque 3.11

Ces résultats sont en fait plus généraux et valent non pas seulement au point 1 mais pour tout point z_0 du cercle de convergenece.

[x-ens,an2] p252 et [ZQ]

4 Lien entre holomorphie et analyticité

4.1 Holomorphie

Propriété 4.1

La somme d'une série entière est holomorphe. De plus sa dérivée s'obtient en dérivant terme à terme.

Remarque 4.2

Puisque la $\mathbb{C}$-dérivée de $z \mapsto a_n z^n$ est aussi $z \mapsto n a_n z^{n-1}$, la $\mathbb{C}$-dérivée et la $\mathbb{R}$-dérivée de f coïncident sur $\mathbb{R}$.

Remarque 4.3

La formule de Cauchy pour les séries entières _ à savoir $\forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in]0,R[\ \ a_n = \frac{1}{2i\pi r^n} \int\limits_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta} d\theta$; qui se démontre par simple interversion série/intégrale peut maintenant se lire comme un cas particulier de la formule de Cauchy pour les fonctions holomorphes _ à savoir pour tout compact K à bord régulier et inclus dans le domaine, pour $z \in K$ on a $f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial K} \frac{f(\xi)}{z-\xi} d\xi$.

[G] p239

[AM] p80

4.2 Analyticité

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $z_0 \in \Omega$. Soit $g \in \mathcal{F}(\Omega, C)$.

Définition 4.4

On dit que g est ***développable en série entière (D.S.E)*** *en z_0 s'il existe $r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^N$ tel que $\forall h \in \mathcal{B}(0,r)\ \ f(z_0+h) = \sum \alpha_n h^n$.*

[AM] p70

Définition 4.5

On dit que g est ***analytique*** *si elle est D.S.E en tous ses points.*

⚠ ! 4.6

Les coefficients $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et le rayon dépendent du point z_0 en lequel on se place, même pour une fonction analytique. [SSF] p88

Propriété 4.7

Une somme de série entière est analytique (sur le disque ouvert de convergence).
Plus précisément on a : $\forall z_0 \in \mathcal{B}(0,R), \forall h \in \mathcal{B}(0,R-|z_0|)\ \ f(z_0+h) = \sum \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) h^n$.
C'est ce qu'on appelle le **développement de Taylor** *de f en* z_0.

Corollaire 4.8 (*Principe des zéros isolés amélioré*)

Si l'ensemble des zéros de f *admet un point d'accumulation, alors f est nulle.*

[SSF] p88

Corollaire 4.9

Si g *est D.S.E en* z_0*, alors on a unicité des coefficients* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *du développement.*

Définition 4.10

Si $z \in \mathcal{C}(0,R)$*, on dit que* z *est un* **point régulier** *(pour f) si on peut prolonger f de manière analytique au voisinage de* z*. Dans le cas contraire on parlera de* **point singulier***. Si tous les points du cercle sont singuliers, on dira que le cercle est une* **coupure** *pour f.*

Propriété 4.11

La somme f admet au moins un point singulier sur $\mathcal{C}(0,R)$.

Remarque 4.12

Ce minimum est parfois atteint.
Par exemple $z \mapsto \frac{1}{1+z}$ *est D.S.E* z_0 *pour tout* $z_0 \in \mathcal{C}(0,1)$ *sauf pour* $z_0 = 1$.

Propriété 4.13 (*Théorème des lacunes de Hadamard*)

Si la suite d'indices $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{N}^{+*})^{\mathbb{N}}$ *vérifie* $\forall n \in \mathbb{N}\ \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geqslant \alpha$ *pour un certain* $\alpha > 1$*, et si* $\sum a_n z^{\lambda_n}$ *est de rayon de convergence 1, alors* $\mathcal{C}(0,1)$ *est une coupure.*

[ZQ] p54

4.3 Équivalence entre analyticité et holomorphie

Propriété 4.14

Si $g \in \mathcal{F}(\Omega,\mathbb{C})$ *est* $\mathbb{C}$*-analytique, alors g est holomorphe.*
Si $t \in \mathcal{F}(\tilde{\Omega},\mathbb{C})$ *est* $\mathbb{R}$*-analytique, alors t est* $\mathcal{C}^\infty$ *(où* $\tilde{\Omega}$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}$*).*

Δ ! 4.15

Sur $\mathbb{R}$ *la réciproque est fausse.*
Par exemple $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ *prolongée par 0 en 0 est* $\mathcal{C}^\infty$ *mais non analytique.*

[G] p254

Propriété 4.16

Si $g \in \mathcal{F}(\Omega,\mathbb{C})$ *est holomorphe, alors elle est* $\mathbb{C}$*-analytique.*
(Ce résultat repose sur la formule de Cauchy pour les fonctions holomorphes que nous admettons ici)

5 Applications courantes

5.1 A la combinatoire

On peut résoudre une équation de récurrence du type $\sum_{k=p}^{k=q} \lambda_k a_k = 0$ (où les inconnues sont les a_k et où les λ_k sont des coefficients fixés) en introduisant des séries génératrices, comme par exemple la série génératrice exponentielle $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$. La relation de récurrence donne alors une équation différentielle sur les sommes des séries introduites. De sa résolution on déduit les coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 5.1 (***Calcul des nombres de Bell***)

b_n = le nombre de partitions de $[1..n] = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^n}{k!}$

[x-ens,ag1] p12

Exemple 5.2 (***Calcul des nombres de Catalan***)

c_n = le nombre d'arbres binaires à n noeuds $= \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

[x-ens,ag1] p14

5.2 Aux équations différentielles

On peut résoudre certaines équations différentielles en supposant que la solution est la somme d'une série entière $\sum a_n x^n$. L'équation différentielle rééecrite avec cette série et ses dérivées fait alors apparaitre une équation de récurrence sur les coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (par unicité des coefficients). On en déduit une solution si le rayon est non nul, solution définie sur le disque de convergence.

Exemple 5.3

$4ty'' + 2y' - y = 0$ a pour solution $t \mapsto \begin{cases} \cosh(\sqrt{t}) & \text{si } t \geqslant 0 \\ \cos(\sqrt{-t}) & \text{si } t < 0 \end{cases}$

[SSF] p98

B. Développements

Théorème d'Abel angulaire et théorèmes taubériens

On s'intéresse ici à une série entière $\sum a_n z^n$, de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}^{+*}$. On considère sa somme $f = \begin{pmatrix} \mathcal{B}(0,R) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & a_n z^n \end{pmatrix}$.

On sait déjà que f est continue sur le disque ouvert de convergence, et on se demande ici si l'on peut étendre cette continuité au bord, c'est à dire sur le cercle, en un point où l'on sait que la série converge. Le théorème d'Abel angulaire répond oui en un certain sens, puisqu'il assure une continuité affaiblie, une continuité dans un domaine angulaire. Nous l'énonçons ici dans une version où $R = 1$ et $z_0 = 1$, bien que le résultat se démontre de même pour $R \in \mathbb{R}^{+*}$ et $z_0 \in \mathcal{C}(0,R)$.

Théorème 1 (***Théorème d'Abel angulaire***)

On pose pour $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$ le domaine $\Delta_{\theta_0} = \left\{1 - \rho e^{i\theta} \,|\, \rho \in \mathbb{R}^{+*}, \theta \in [-\theta_0, \theta_0], |1 - \rho e^{i\theta}| < 1\right\}$.
Si la série entière $\sum a_n z^n$ est de rayon de convergence 1 et si $\sum a_n$ converge vers S, alors

$$\forall \theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[, \quad \lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = S$$

Démonstration : Pour la preuve fixons $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

Pour tout entier naturel n, on introduit le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$. Ainsi on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = R_{n-1} - R_n$.

On se donne z un point quelconque de Δ_{θ_0} et on cherche à étudier la distance entre $f(z)$ et S. Pour cela on va faire une transformation d'Abel c'est à dire injecter l'expression des coefficients en terme de reste dans nos séries. Pour faire cela proprement on travaille d'abord au rang fini $N \in \mathbb{N}^*$. On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^N a_n z^n - \sum_{n=0}^N a_n &= \sum_{n=\cancel{0}1}^N a_n(z^n - 1) \\
&= \sum_{n=1}^N R_{n-1}(z^n - 1) - \sum_{n=1}^N R_n(z^n - 1) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n(z^{n+1} - 1) - \sum_{n=1}^N R_n(z^n - 1) \\
\underbrace{\sum_{n=0}^N a_n z^n}_{\substack{\downarrow \\ f(z)}} - \underbrace{\sum_{n=0}^N a_n}_{\substack{\downarrow \\ S}} &= \underbrace{\underbrace{R_0(z-1)}_{R_0(z^1 - z^0)} + \sum_{n=1}^N R_{n-1}(z^{n+1} - z^n)}_{\sum_{n=0}^{N-1} R_n(z^{n+1} - z^n)} - \underbrace{\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{R_N} \underbrace{(z^N - 1)}_{\text{borné}}}_{\substack{\downarrow \\ 0}}
\end{aligned}$$

Puisqu'on sait que le terme de gauche converge quand N tend vers l'infini, et que le dernier terme à droite converge aussi, on en déduit que le terme du milieu converge aussi, et en passant à la limite on obtient

$$f(z) - S = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n (z - 1)$$

On veut maintenant montrer que cette différence tend vers 0 quand z tend vers 1. Fixons $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. On majore le module par la somme des modules, qui a priori peut être infinie.

$$|f(z) - S| \leqslant \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |R_n||z|^n\right) |z - 1|$$

Or puisque $\sum a_n$ converge, $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Il existe donc un rang N_ε à partir duquel R_n est plus petit que ε en module. On peut alors séparer notre somme en deux selon ce rang, et utiliser au delà cette majoration de R_n, tandis qu'en deçà on majore plutôt $|z|$ par 1 :

$$\begin{array}{rcccl}
\sum_{n=0}^{+\infty}|R_n||z|^n & = & \sum_{n=0}^{N_\varepsilon-1}|R_n|\underbrace{|z|^n}_{\leqslant 1} & + & \sum_{n=N_\varepsilon}^{+\infty}\underbrace{|R_n|}_{\leqslant\varepsilon}|z|^n \\
& \leqslant & \sum_{n=0}^{N_\varepsilon-1}|R_n| & + & \varepsilon\sum_{n=N_\varepsilon}^{+\infty}|z|^n \\
& \leqslant & C_\varepsilon & + & \varepsilon\sum_{n=0}^{+\infty}|z|^n \\
& \leqslant & C_\varepsilon & + & \varepsilon\frac{1}{1-|z|}
\end{array}$$

Puisque $z\in\Delta_{\theta_0}$ on peut l'écrire $z=1-\rho e^{i\theta}$, où $\rho\in\mathbb{R}^{+*}$ et $\theta\in[-\theta_0,\theta_0]$. Alors $|z-1|=|\rho e^{i\theta}|=\rho$. On a donc

$$|f(z)-S|\leqslant\rho\left(C_\varepsilon+\varepsilon\frac{1}{1-|z|}\right)$$

Quand z tend vers 1, le dénominateur $1-|z|$ tend vers 0, et $\frac{1}{1-|z|}$ explose. Il faut donc étudier plutôt le quotient

$$\frac{\rho}{1-|z|}=\frac{\rho\,(1+|z|)}{1-|z|^2}$$

Or $|z|^2=Re(z)^2+Im(z)^2=(1-\rho\cos\theta)^2+(\rho\sin\theta)^2=1-2\rho\cos\theta+\rho^2\underbrace{(\cos\theta^2+\sin\theta^2)}_{=1}$ On obtient alors

$$\frac{\rho}{1-|z|}=\frac{\cancel{\rho}\,(1+\overbrace{|z|}^{\leqslant 1})}{2\cancel{\rho}\cos\theta-\rho^{\cancel{2}}}\leqslant\frac{2}{2\cos\theta-\rho}$$

Or puisque $\theta_0\leqslant\frac{\pi}{2}$ et que $|\theta|\leqslant|\theta_0|$, on a $\cos\theta\geqslant\cos\theta_0$, d'où finalement

$$\frac{\rho}{1-|z|}\leqslant\frac{2}{2\,\cos\theta_0-\rho}$$

Choisir z proche de 1 c'est choisir ρ petit. Pour ρ assez petit qu'il vérifie $\left\{\begin{array}{c}\rho\leqslant\cos\theta_0\\ \rho\, C_\varepsilon\leqslant\varepsilon\end{array}\right.$, ainsi on a

$$|f(z)-S|\leqslant\varepsilon+\varepsilon\frac{2}{\cos\theta_0}=\varepsilon\left(1+\frac{2}{\cos\theta_0}\right)$$

Cette inégalité permet de conclure puisqu'elle montre qu'on peut rendre $|f(z)-S|$ arbitrairement petit en se restreignant à un voisinage de 1 dans Δ_{θ_0}. Autrement dit on a bien

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Delta_{\theta_0}}} f(z)=S$$

■

Ce qu'on vient de montrer et que donne le théorème d'Abel, c'est un résultat de continuité supposant la convergence de la série en un point du cercle. Mais attention la réciproque est fauuse : même si la série peut se prolonger de manière continue en un point du cercle, on n'est pas assuré de la convergence de la série en ce point.

Contre-exemple 1

La série entière $\sum(-1)^n z^n$ est de rayon de convergence 1, et sa somme $f=z\mapsto\frac{1}{1+z}$ converge vers $1/2$ en 1. Pourtant la série $\sum(-1)^n$ ne converge pas puisqu'elle vaut alternativement 1 et 0.

Cependant en ajoutant des hypothèses de domination sur la suite des coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut démontrer une pseudo réciproque, c'est ce qu'énnoncent les théorèmes taubériens.

Théorème 2 (***Théorème taubérien faible***)

Considérons $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R = 1$.
Si $\lim\limits_{z \to 1, z \in]0,1[} f(z) = S$ *et* $a_n = o(\frac{1}{n})$, *alors* $\sum a_n$ *converge vers* S.

Démonstration : Ici, pour tout entier naturel n, on introduit la somme partielle $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$.

Pour montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers S, on va montrer qu'elle se rapproche de plus en plus de la suite $(f(1-\frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge elle même vers S par hypothèse puisque $1-\frac{1}{n}$ tend vers 1 sur le segment $]0,1[$.

Fixons d'abord $z \in]0,1[$. Alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on peut écrire

$$\begin{aligned} |S_n - f(z)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \sum_{k=n}^{+\infty} a_k z^k \right| \\ &\leqslant \left| \sum_{k=0}^{n} a_k (1-z^k) \right| + \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k z^k \right| \\ &\leqslant \sum_{k=\cancel{0}1}^{n} |a_k||1-z^k| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k||z|^k \end{aligned}$$

or pour $k \geqslant 1$ on a

$$|1-z^k| = |1-z| \left| \sum_{i=0}^{k-1} z^i \right| \leqslant |1-z| \sum_{i=0}^{k-1} \underbrace{|z|^i}_{\leqslant 1} \leqslant k\,|1-z|$$

ainsi du $k|a_k|$ apparait dans la majoration, du moins dans la première somme, et on force son apparition dans la deuxième artificiellement :

$$|S_n - f(z)| \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n} k|a_k| \right) |1-z| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{k}}_{\leqslant \frac{1}{n}} (k|a_k|)\,|z|^k$$

On utilise ici l'hypothèse de domination sur les coefficients a_n qui assure que $ka_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi on peut majorer les ka_k pour $k \geqslant n$ par leur sup qui est nécessairement fini.

$$\begin{aligned} |S_n - f(z)| &\leqslant |1-z| \sum_{k=0}^{n} k|a_k| + \frac{1}{n} \sup_{k\geqslant n} (k|a_k|) \sum_{k=n+1}^{+\infty} |z|^k \\ &\leqslant |1-z| \sum_{k=0}^{n} k|a_k| + \frac{1}{n} \sup_{k\geqslant n} (k|a_k|) \frac{1}{1-|z|} \end{aligned}$$

En particulier pour $z = 1-\frac{1}{n}$, et donc pour $|1-z| = 1-|z| = \frac{1}{n}$ on obtient

$$\left| S_n - f\left(1-\frac{1}{n}\right) \right| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} k|a_k| + \cancel{\frac{1}{n}} \sup_{k\geqslant n} (k|a_k|) \cancel{\frac{1}{1/n}}$$

Le premier terme tend vers 0 quand n tend vers l'infini car c'est la moyenne de Césaro de la suite des ka_k qui, on l'a dit, tend elle même vers 0. De plus cela assure aussi que ce sup tend lui aussi vers 0. Finalement on a

$$\left| S_n - f\left(1-\frac{1}{n}\right) \right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Puisque $f\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$, on en déduit que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$. D'où le résultat. ■

Notez que ce théorème est dit faible parce que l'hypothèse de domination sur les coefficients est relativement forte. En effet on peut aussi conclure si on suppose seulement $a_n = O(\frac{1}{n})$, c'est ce qu'affirme le théorème taubérien dit fort. Nous nous contenterons de l'énoncer ici. Pour une preuve Cf [G]p 293.

Théorème 3 (***Théorème taubérien fort***)

Si $\lim\limits_{z \to 1, z \in]0,1[} f(z) = S$ *et* $a_n = O(\frac{1}{n})$, *alors* $\sum a_n$ *converge vers* S.

Théorème des lacunes d'Hadamard

[ZQ] p54

On sait déjà que les points du cercle de convergence (on se place implicitement dans le cas d'un rayon de convergence $R \in \mathbb{R}^{+*}$ en parlant de cercle de convergence) ne peuvent être tous réguliers, sans quoi on pourrait étendre le domaine de convergence à un disque de rayon plus grand, ce qui est impossible par définition.

Il y a donc au minimum un point singulier sur le cercle. Ce minimum est parfois atteint, comme par exemple par la série $\sum(-1)^n z^n$ de rayon de convergence $R = 1$ et de somme $f = z \mapsto \frac{1}{1+z}$ (sur le disque ouvert de convergence). Puisque pour tout $z_0 \neq -1$ on a $\frac{1}{1+z} \underset{z \to z_0}{\longrightarrow} \frac{1}{1+z_0}$, on sait en particulier que pour tout point $z_0 \neq -1$ du cercle de convergence, $f(z)$ converge quand z tend vers z_0, et grâce au théorème taubérien faible on en déduit que la série est convergente en z_0. En revanche le point -1 ne peut être régulier puisque c'est un pôle de f. A l'inverse il y a des cas où tous les points du cercles sont singuliers, on parle alors de coupure. C'est ce qu'on exhibe ici avec le théorème des lacunes d'Hadamard.

Théorème 4 (***Théorème des lacunes d'Hadamard***)

> *Si la suite d'indices $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{N}^{+*})^{\mathbb{N}}$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geqslant \alpha$ pour un certain $\alpha > 1$, et si $\sum a_n z^{\lambda_n}$ est de rayon de convergence 1, alors $\mathcal{C}(0,1)$ est une coupure.*

Démonstration : Commençons par remarquer que la série ici considérée n'est pas la série entière de coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puisqu'ici z est à la puissance λ_n et non n. Les coefficients de cette série seraient plutôt du type $0a_1 0...0a_2 0.....0a_3...$ et c'est ces successions de zéros qu'on appelle lacunes et qui donnent son nom au théorème.

Pour parler de la singularité ou de la régularité des points du cercle on introduit f la somme de cette série entière, définie sur $D = \mathcal{B}(0,1)$ le disque de convergence.

$$f = \begin{pmatrix} D & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \sum a_n z^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Ainsi $g_{/D} = f$ et un point est singulier s'il n'admet aucun voisinage sur lequel on peut étendre f de manière analytique.

On va d'abord montrer que le point 1 est singulier. **Par l'absurde on suppose qu'il est régulier**. Il existe alors un voisinage, qu'on peut supposer être _ quitte à le réduire _ une boule centrée en 1 et de rayon $r \in \mathbb{R}^{+*}$ telle que f se prolonge en g, analytique et définie sur $\Omega = D \cup \mathcal{B}(1,r)$.

On introduit maintenant

$$\varphi = \begin{pmatrix} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{z^p + z^{p+1}}{2} \end{pmatrix} \text{ où } p \in \mathbb{N} \text{ tel que } \frac{p+1}{p} < \alpha.$$

Pour se convaincre qu'un tel p existe bien il suffit de remarquer que $\frac{p+1}{p}$ tend vers 1 en décroissant. En effet cela assure que pour p assez grand ce quotient sera passé sous α qui est strictement supérieur à 1.

Cette fonction φ a le bon goût d'envoyer D sur D, et $\overline{D}^c$ sur $\overline{D}^c$. On peut même être plus précis : φ envoie $\overline{D}$ dans Ω. En effet on a $\varphi(1) = 1$ et

$$\forall z \in \overline{D}_{\setminus\{1\}} \ \ |\varphi(z)| = \frac{1}{2}|z|^p \underbrace{|1+z|}_{<2} < 1 \quad \text{donc} \quad \forall z \in \overline{D}_{\setminus\{1\}} \ \ \varphi(z) \in D \subset \Omega$$

Mais on cherche un peu plus que $\varphi(\overline{D}) \subset \Omega$, c'est à dire qu'on cherche à envoyer un domaine un peu plus large que $\overline{D}$ qui soit envoyé par φ dans Ω. On introduit alors pour chaque $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ le disque $D_\varepsilon = \mathcal{B}(0, 1+\varepsilon)$. On cherche un ε tel que $\varphi(D_\varepsilon) \subset \Omega$. **Par l'absurde supposons qu'il n'y en ait pas**, c'est à dire supposons que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ $\varphi(D_\varepsilon) \not\subset \Omega$.

En considérant la suite des $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ on a l'existence d'une suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall \in \mathbb{N}, \ \begin{cases} x_n \in D_{\frac{1}{n}} \\ \varphi(x_n) \notin \Omega \end{cases}$$

Puisqu'on sait que si x_n était dans D, $\varphi(x_n)$ serait dans Ω, on a plus précisément

$$\forall \in \mathbb{N}, \ |x_n| \in]1, 1 + \frac{1}{n}[$$

Comme la suite des boules $D_{\frac{1}{n}}$ est décroissante pour l'inclusion, toutes ces boules et donc tous les points x_n sont dans D_1 et donc dans son adhérence $\overline{D_1}$ qui est compacte. Ainsi on peut extraire de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite $(\tilde{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $\overline{D_1}$ vers un point qu'on appelle x. Par continuité de φ, $\varphi(x)$ est la limite des $\varphi(x_n)$. Or puisque chaque $\varphi(x_n)$ est dans Ω^c et que Ω^c est un fermé, $\varphi(x)$ y appartient aussi. On a donc $\varphi(x) \notin \Omega$. Mais par ailleurs on sait que $|x|$ est la limite des $|\tilde{x_n}|$, qui est la même que celle des $|x_n|$ c'est à dire 1. Cela implique que $x \in \overline{D}$ et donc que $\varphi(x) \in \Omega$. **D'où une contradiction.**

On en déduit qu'il existe bien $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\varphi(D_{\varepsilon_0}) \subset \Omega$, autrement dit tel que D_{ε_0} est envoyé par φ dans le domaine de définition de g. On peut alors composer, et leur composée $g \circ \varphi$ est holomorphe sur D_{ε_0} puisque g l'est car analytique et φ l'est car polynômiale.

On peut donc l'écrire comme une série entière sur ce disque tout entier (résultat plus fort que l'équivalence entre holomorphie et analyticité puisqu'on a un développement global et non local), c'est-à-dire qu'il existe des coefficients $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que

$$\forall z \in D_{\varepsilon_0},\ \ g \circ \varphi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

L'interêt ici d'avoir un même développement sur tout D_{ε_0} c'est qu'on va pouvoir gagner des informations sur les coefficients b_n en étudiant $g \circ \varphi$ sur D, là où on connait bien g puisqu'elle coïncide avec f, puis utiliser ces informations en dehors de D. Allons-y.

Puisque φ laisse D stable, on a

$$\forall z \in D,\ \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = g \circ \varphi(z) = f \circ \varphi(z) = f\left(\frac{z^p + z^{p+1}}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \underbrace{\left(\frac{z^p + z^{p+1}}{2}\right)^{\lambda_n}}_{:=P_n(z)}$$

Le plus haut degré sous lequel apparait z quand on développe $P_n(z)$ est $\lambda_n(p+1)$, tandis que le plus bas dans $P_{n+1}(z)$ est $\lambda_{n+1}p$ or

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \lambda_n(p+1) < \lambda_{n+1}p \quad \text{car} \quad \frac{p+1}{p} < \alpha < \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}$$

Cela assure que les P_n ne se recouvrent pas, et que tronquer la série au degré $\lambda_N(p+1)$ c'est comme tronquer après P_N. Par unicité du développement en série entière on peut identifier cette série tronquée à la série des $b_n z^n$ elle aussi tronquée au degré $\lambda_N(p+1)$. On obtient ainsi

$$\forall z \in D, \forall N \in \mathbb{N},\ \sum_{n=0}^{N} a_n \left(\frac{z^p + z^{p+1}}{2}\right)^{\lambda_n} = \sum_{n=0}^{\lambda_N(p+1)} b_n z^n$$

Cette égalité cache une expression de chaque b_n en fonction des a_n et des λ_n, mais on se garde de développer et on exporte cette identification en dehors de D sous sa forme implicite :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall N \in \mathbb{N},\ \sum_{n=0}^{N} a_n \left(\frac{z^p + z^{p+1}}{2}\right)^{\lambda_n} = \sum_{n=0}^{\lambda_N(p+1)} b_n z^n$$

En particulier pour $z \in]1, 1+\varepsilon_0[$ on a

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \sum_{n=0}^{N} a_n \tilde{z}^{\lambda_n} = \sum_{n=0}^{\lambda_N(p+1)} b_n z^n \ \text{ où } \tilde{z} = \frac{z^p + z^{p+1}}{2}$$

A gauche on a une série divergente car $\tilde{z}$ est de module strictement plus grand que 1, et donc en dehors de $\overline{D}$, tandis qu'à droite on a une série qui converge vers $g \circ \varphi(z)$. **Absurde.**

On en déduit qu'il n'existe pas de tel prolongement analytique g, autrement dit que 1 n'est pas un point régulier pour f.

Considérons maintenant le cas d'un point z_0 quelconque sur le cercle. On peut affirmer que 1 est un point singulier pour la série $\sum \underbrace{a_n z_0^{\lambda_n}}_{\tilde{a_n}} z^{\lambda_n}$ car il suffit d'appliquer ce qu'on vient de démontrer à $\tilde{f}$ la somme de la série entière de $\sum \tilde{a_n} z^{\lambda_n}$, qui est aussi de rayon de convergence 1 puisque $\forall n \in \mathbb{N} |\tilde{a_n}| = |a_n|$.

Comme $\tilde{f} = f \circ \gamma_{z_0}$ où γ_{z_0} est la multiplication par z_0, si on pouvait prolonger f de manière analytique au voisinage de z_0, on aurait un prolongement analytique de $\tilde{f}$ en 1 en composant à droite par γ_{z_0} (qui est analytique et qui envoie justement 1 sur z_0). La singularité de 1 pour $\tilde{f}$ implique donc celle de z_0 pour f.

On a ainsi montré que les points du bord du disque d'une telle série lacunaire sont tous singuliers. ■

C. Exercices et questions

Question .1

> *Etudier la série* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. *Dire si elle converge et si oui quelle est sa limite.*

Puisque $\frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ en décroissant, on sait d'après le critère des séries alternées que cette série converge.

Par ailleurs on remarque que c'est la valeur que prend la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1}$ en 1. Comme cette série entière est de rayon de convergence $R = 1$ et qu'elle coïncide sur $\mathbb{C}$ avec la fonction arctan, le théorème d'Abel angulaire assure que cette série converge vers $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

Question .2

> *Étudier la série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. *Dire si elle converge et si oui quelle est sa limite.*

Puisque $\frac{(-1)^{n+1}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ en décroissant, on sait d'après le critère des séries alternées que cette série converge.

Par ailleurs on remarque que c'est la valeur que prend la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^{n+1}$ en 1. Comme cette série entière est de rayon de convergence $R = 1$ et qu'elle coïncide sur $\mathbb{C}$ avec la fonction $x \mapsto \log(1+x)$, le théorème d'Abel angulaire assure que cette série converge vers $\log(1+1) = \log(2)$.

Question .3

> *Montrer le principe des zéros isolés*

On considère une série entière $\sum a_n z^n$, de rayon de convergence R et sa somme f. Montrons d'abord la version simple du principe des zéros isolés, la version en 0.

Théorème 5

> *Si* 0 *est point d'accumulation des zéros de* f, *alors tous les* a_n *sont nuls et* f *est la fonction nulle.*

Démonstration : On rappelle que a est **point d'accumulation** d'un ensemble X s'il existe une suite de points de X différents de a convergeant vers a i.e, $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in {X_{\setminus\{a\}}}^{\mathbb{N}}$, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.

Ici il existe donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathcal{B}(0,R)_{\setminus\{0\}}\right)^{\mathbb{N}}$, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) = 0$. En particulier $R > 0$ sinon $\mathcal{B}(0,R)_{\setminus\{0\}}$ serait vide.

Par l'absurde supposons que les coefficients a_n ne sont pas tous nuls. On note alors n_0 l'indice du premier coefficient non nul, ainsi on a $a_{n_0} \neq 0$ et $\forall n \leqslant n_0, a_n = 0$. Alors on a

$$\forall z \in \mathcal{B}(0,R),\ \ f(z) = \sum_{n=\cancel{0}\,n_0}^{+\infty} a_n z^n = z^{n_0} \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n z^{n-n_0} = z^{n_0} \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n_0+n} z^n}_{:=g(z)}$$

Puisque $(a_n z^n)_{n\geqslant 0}$ bornée $\Leftrightarrow (a_n z^n)_{n\geqslant n_0}$ bornée $\Leftrightarrow (a_n z^{n-n_0})_{n\geqslant n_0}$ bornée $\Leftrightarrow (a_{n_0+n} z^n)_{n\geqslant 0}$ bornée les séries entières de sommes f resp. g ont le même rayon de convergence $R > 0$ donc g est continue en 0 et coïncide sur $\mathcal{B}(0,R)_{\setminus\{0\}}$ avec $z \mapsto \frac{f(z)}{z^{n_0}}$. Donc

$$a_{n_0} = g(0) = \lim_{n\to+\infty} g(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\overbrace{f(x_n)}^{=0}}{(x_n)^{n_0}} = 0$$

C'est **absurde**. On en déduit que tous les coefficients a_n sont nuls, et que par conséquent f est la fonction nulle. ■

Pour se ramener au principe des zéros isolés dans sa version générale on va itérer cet argument. En effet si les zéros de f admettent un point d'accumulation z_0, on peut considérer le développement en série entière de f en z_0, dont on sait que le rayon de convergence est $R - |z_0|$, ce qui revient à considérer $g := z \mapsto f(z - z_0)$ comme une série entière sur le plus grand disque centré en z_0 inclus dans le disque de convergence de f. On sait alors que les zéros de g admettent 0 comme point d'accumulation, et par ce qui précède on en déduit que g est nulle et donc que f est nulle sur le disque $\mathcal{B}(z_0, R - |z_0|)$. Deux cas peuvent alors se présenter :

Soit $0 \in \mathcal{B}(z_0, R-|z_0|)$ et il est alors clairement point d'accumulation des zéros de f (en tant que point intérieur de cet ensemble de zéros qu'est le disque susmentionné). Il nous suffit d'appliquer une fois encore notre théorème pour assurer la nullité de f.

Soit $0 \notin \mathcal{B}(z_0, R - |z_0|)$, on va alors chercher à appliquer le théorème à un point plus près de 0 que z_0, ou plus exactement à un point plus loin du bord du disque de convergence de f afin d'obtenir la nullité de f sur un domaine plus large et contenant à son tour possiblement 0. Précisément on pose $z_1 = z_0 - \frac{R-|z_0|}{2} \frac{z_0}{|z_0|}$. Ainsi $z_1 \in \mathcal{B}(z_0, R - |z_0|)$, et alors z_1 est point d'accumulation des zéros de f. Par le théorème précédent on en déduit que f est nulle sur $\mathcal{B}(z_1, R - |z_1|)$. L'important ici c'est que ce domaine de nullité grandit, en effet comme $|z_1| = \left|1 - \frac{R-|z_0|}{2|z_0|}\right| |z_0| = |z_0| - \frac{R-|z_0|}{2}$ on a $R - |z_1| = R - |z_0|(1 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{2}R - |z_0|$.

Donc en itérant le processus, non seulement le rayon du domaine de nullité croît strictement, mais il croît de manière géométrique tant que le domaine ne contient pas 0, ce qui assure qu'un nombre fini d'itérations suffiront.

Notons ici que le fait de savoir qu'une somme de série entière est développable en série entière en tout point du disque de convergence n'aurait pas suffit à conclure. On utilise ici que la somme f s'écrit comme une même série entière jusqu'au bord du disque. On avait besoin d'une précision analogue dans la démonstration du théorème des lacunes d'Hadamard puisqu'il nous fallait écrire une fonction holomorphe comme une même série entière sur un disque allant jusqu'au bord du domaine.

Ainsi si les zéros d'une somme de série entière f admettent un point d'accumulation, alors nécessairement f est nulle.

D. Bibliographie

Références

[G] *Les maths en tête, Analyse*, de X.Gourdon, 2ème ed. aux éditions ellipses.

[X-ALG1] *Oraux x-ens, algèbre 1*, de Francinou, Gianella, Nicolas, aux editions Cassini.

[X-AN2] *Oraux x-ens, analyse 2*, de Francinou, Gianella, Nicolas, aux editions Cassini.

[SSF] *Suite et séries de fonctions*, de J.Moisan, A.Vernotte et N.Tosel, aux éditions ellipses.

[AM] *Analyse complexe*, de E.Amar et E.Matheron, aux editions Cassini.

[ZQ] *Analyse pour l'agrégation* , de C.Zuily et H.Quéffélec, 4ème ed. aux editions Dunod.