Au bord du disque de convergence : théorèmes abéliens et taubériens.

Théorème (Abel angulaire)**.** *Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. Soit $\theta_0 \in [0, \pi/2[$. On pose ;*

$$\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbf{C},\ |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0,\, \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0],\ \ z = 1 - \rho e^{i\theta}\}.$$

Si la série $\sum a_n$ converge alors :

$$\lim_{z \to 1,\, z \in \Delta_{\theta_0}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Preuve. On note $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$. Une transformation d'Abel donne pour $(n,p) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$ et $z \in \Delta_{\theta_0}$:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k z^k = \sum_{k=n+1}^{n+p} (R_{k-1} - R_k) z^k = R_n z^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} R_k (z^{k+1} - z_k) - R_{n+p} z^{n+p}.$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $N_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, $|R_n| \leq \varepsilon$. Alors, pour $n \geq N_0$:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k z^n \right| \leq \varepsilon |z^{n+1}| + \varepsilon \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |z^{k+1} - z^k| + \varepsilon |z^{n+p}| \leq 2\varepsilon + \varepsilon \frac{|z-1|}{1-|z|}.$$

Maintenant, si $z = 1 - \rho e^{i\varphi} \in \Delta_{\theta_0} \cap D(1, \cos\theta_0)$, on a :

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} = \frac{\rho}{2\rho\cos\varphi - \rho^2}(1 + |z|) \leq \frac{2}{2\cos\varphi - \rho} \leq \frac{2}{\cos\theta_0}$$

de sorte que

$$\forall z \in \Delta_{\theta_0} \cap D(1, \cos\theta_0),\ \ \forall n \geq N_0,\ \ \forall p \in \mathbf{N}^*,\ \ \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k z^n \right| \leq \left(2 + \frac{2}{\cos\theta_0} \right) \varepsilon.$$

Cette dernière majoration est aussi valable pour $z = 1$. Finalement, un critère de Cauchy uniforme justifie la continuité de f en 1 et la limite annoncée. □

Théorème (Taubérien faible)**.** *Soit $f(z) = \sum s_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 avec $a_n = o(1/n)$. Si :*

$$\exists S \in \mathbf{C},\ \lim_{x \to 1,\, x < 1} f(x) = S$$

alors $\sum a_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

Preuve. Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. On écrit :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall x \in]0,1[,\quad S_n - f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(1-x^k) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$$

et comme $(1-x^k) = (1-x)(1+x+\ldots+x^{k-1}) \leq k(1-x)$ pour $0 < x < 1$ on en déduit :

$$|S_n - f(x)| \leq (1-x)\sum_{k=1}^{n} k|a_k| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k|a_k|}{n} x^k \leq (1-x)Mn + \frac{\sup_{k>n} k|a_k|}{n(1-x)}$$

où M est un majorant de la suite $(k|a_k|)_k$. Soit $0 < \varepsilon < 1$. On a en particulier :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \left|S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)\right| \leq M\varepsilon + \frac{\sup_{k>n} k|a_k|}{\varepsilon}.$$

On choisit N_0 tel que $\sup_{k>N_0} k|a_k| \leq \varepsilon^2$, et on trouve :

$$\forall n \geq N_0,\quad \left|S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)\right| \leq (M+1)\varepsilon.$$

On choisit $N_1 \geq N_0$ tel que pour $n \geq N_1$, $|f(1-\varepsilon/n) - S| < \varepsilon$ et on trouve :

$$\forall n \geq N_1,\quad |S_n - S| \leq \left|S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)\right| + \left|f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) - S\right| \leq (M+2)\varepsilon$$

ce qui conclut. $\square$

Théorème (Taubérien fort, Hardy-Littlewood)**.** *Soit $f(z) = \sum s_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 avec $a_n = \mathcal{O}(1/n)$. Si :*

$$\exists S \in \mathbf{C},\quad \lim_{x \to 1,\, x<1} f(x) = S$$

alors $\sum a_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

Preuve. On se restreint sans mal au cas $S = 0$ (quitte à considérer $a_0 - S$ comme premier terme). On note Φ l'ensemble des fonctions $\varphi : [0,1] \to \mathbf{R}$ telles que

(i) Pour tout $x \in [0,1[$, la série $\sum a_n \varphi(x^n)$ converge

(ii) $\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \varphi(x^n) = 0$.

Clairement, Φ contient les fonctions polynômes qui s'annulent en zéro. De plus, pour $q : x \mapsto x^k$, on a :

$$\forall x \in [0,1[,\ (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^n q(x^n) = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} (x^{k+1})^n = \frac{1-x}{1-x^{k+1}} \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} \frac{1}{k+1} = \int_0^1 q(t)dt$$

et le résultat reste vrai par linéarité pour tout polynôme. On va maintenant montrer que $g := \mathbf{1}_{[1/2,1]} \in \Phi$ ce qui conclura puisque :

$$\forall x \in [0,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) = \sum_{n=0}^{\lfloor -\log 2/\log x \rfloor} a_n.$$

La condition (i) est claire puisque $g(x^n) = 0$ dès que $x^n < 1/2$. Pour le reste, on va approcher g par des polynômes p_1, p_2 tels que :

1. $p_1(0) = p_2(0) = 0$ et $p_1(1) = p_2(1) = 0$
2. $p_1 \leq g \leq p_2$ sur $[0, 1]$
3. $\displaystyle\int_0^1 q(x)dx < \varepsilon$ avec $q(x) = \dfrac{p_2(x) - p_1(x)}{x(1-x)}$.

On pose $h(x) := \dfrac{g(x) - x}{x(1-x)} = -\dfrac{1}{1-x}\mathbf{1}_{[0,1/2[}(x) + \dfrac{1}{x}\mathbf{1}_{[1/2,1]}(x)$. Soit $\varepsilon > 0$. Un dessin intelligent montre qu'il existe deux fonctions continues s_1 et s_2 telles que

$$s_1 \leq h \leq s_2 \quad \text{et} \quad \int_0^1 (s_2 - s_1)(t)dt \leq \varepsilon.$$

Puis, par le théorème de Weierstrass, on exhibe deux polynômes $\tilde{s}_1$ et $\tilde{s}_2$ tels que $|s_1 - \tilde{s}_1| < \varepsilon$ et $|s_2 - \tilde{s}_2| < \varepsilon$. On définit alors $u_1 = \tilde{s}_1 - \varepsilon$ et $u_2 = \tilde{s}_2 + \varepsilon$ qui sont des polynômes vérifiant :

$$u_1 \leq h \leq u_2 \quad \text{et} \quad , \int_0^1 (u_2 - u_1)(t)dt \leq \int_0^2 (s_2 - s_1)(t)dt + 4\varepsilon \leq 5\varepsilon.$$

Comme $g(x) = x + x(1-x)h(x)$ sur $[0, 1]$, les polynômes

$$p_1(x) = x + x(1-x)u_1(x) \quad \text{et} \quad p_2(x) = x + x(1-x)u_2(x)$$

conviennent. Finalement :

$$\forall x \in [0, 1[, \quad \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n)\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n||p_1(x^n)| + \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n||(g - p_1)(x^n)|.$$

Le premier terme est $< \varepsilon$ pour $x > \lambda$ pour un certain $0 < \lambda < 1$ puisque $p_1 \in \Phi$. Pour le second terme, on écrit :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n||(g - p_1)(x)| &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|(p_2 - p_1)(x^n) \\
&\leq M \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n(1-x^n)}{n} q(x^n) \leq M(1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} x^n q(x^n)
\end{aligned}$$

où $|a_n| \leq M/n$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et puisque $(1-x^n) = (1-x)(1+x+\ldots+x^{n-1}) \leq n(1-x)$. Or, on a :

$$\lim_{x \to 1^-} (1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} x^n q(x) = \int_0^1 q(t)dt < \varepsilon$$

d'où la conclusion.

□

Références.

V. Beck, J. Malick, G. Peyré, *Objectif agrégation*
X. Gourdon, *Analyse*

207 Prolongement de fonctions. Exemples et applications.
209 Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications. *(le deuxième)*
223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.
230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.
235 Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.
243 Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.