La décomposition de Bruhat et les couples de drapeaux.

Pourquoi pas.

On note T_s l'ensemble des matrices triangulaires supérieures inversibles sur $\mathbf{K}^n$.

Théorème (Décomposition de Bruhat)**.** *Le groupe produit $T_s \times T_s$ agit transitivement sur $GL_n(\mathbf{K})$ et un système de représentants des orbites est donné par les matrices de permutation :*

$$GL_n(\mathbf{K}) = \bigsqcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} T_s P_\sigma T_s.$$

Preuve. Il s'agit d'adapter l'algorithme du pivot de Gauss. Prenons $A = (a_{i,j})_{i,j} \in GL_n(\mathbf{K})$ et procédons comme suit :

(1) La première colonne de A n'est pas nulle et i_1 est le plus grand indice tel que $a_{i_1,1} \neq 0$. On opère :
   - À gauche pour $k < i_1$, $T_{i_1,k}(-a_{k,1}/a_{i_1,1})$: $L_k \leftarrow L_k - \frac{a_{k,1}}{a_{i_1,1}} L_{i_1}$
   - À droite pour $k > 1$, $T_{1,k}(-a_{i_1,k}/a_{i_1,1})$: $C_k \leftarrow C_k - \frac{a_{i_1,k}}{a_{i_1,1}} C_1$
   - On dilate $D_{i_1}(1/a_{i_1,1})$: $L_1 \leftarrow \frac{1}{a_{i_1,1}} L_1$

   La matrice ressemble maintenant à :

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & * & \\ 0 & & & \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & * & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

(2) La matrice est toujours inversible donc la deuxième colonne n'est pas nulle et i_2 est le plus grand indice tel que le coefficient $(i_2, 2)$ n'est pas nul. En procédant comme en (1), on annule la deuxième colonne, la i_2-ème ligne et le coefficients $(i_2, 2)$ vaut 1. Bien sûr $i_2 \neq i_1$.

(3) On construit une suite injective $i_1, \dots, i_n$. Elle est aussi bijective et en notant σ la permutation associée, on a :

$$T_1 A T_2 = P_\sigma$$

   où $T_1, T_2 \in T_s$ car les matrices de transvections et de dilations sont dans T_s. Finalement,

$$A = T_1^{-1} P_\sigma T_2^{-1} \in \bigsqcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} T_s P_\sigma T_s.$$

Il reste à montrer l'unicité d'une telle décomposition : supposons qu'il existe $T, T' \in T_s$ et des permutations σ et σ' telles que $TP_\sigma = P_{\sigma'}T'_{\sigma'}$. *Multiplier par une matrice de permutation revient à permuter les lignes/colonnes*[1] et plus précisément, soit $j \in \{1, \ldots, n\}$:

- Le coefficient $(\sigma'(j), j)$ de $P_{\sigma'}T' = TP_\sigma$ est le coefficient (j, j) de T'. Il est non nul car T' est inversible.
- Le coefficient $(\sigma'(j), j)$ de TP_σ est le coefficient $(\sigma'(j), \sigma(j))$ de T. Il est nul si $\sigma'(j) > \sigma(j)$.
- On a donc montré $\sigma'(j) \leq \sigma(j)$. Par symétrie, $\sigma(j) = \sigma'(j)$ et $\sigma = \sigma'$.

□

Un *drapeau* de $\mathbf{K}^n$ est une suite croissante de sous-espaces $\{0\} = F_0 \subset \ldots \subset F_n = \mathbf{K}^n$ telle que F_k est de dimension k. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des drapeaux de $\mathbf{K}^n$.

Théorème. *Le groupe $GL_n(\mathbf{K})$ agit transitivement sur $\mathcal{D}$. De plus, l'action de $GL_n(\mathbf{K})$ sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ a $n!$ orbites.*

PREUVE. (1) Si $d = (F_0, \ldots, F_n)$ est un drapeau et $A \in GL_n(\mathbf{K})$, alors

$$A \cdot d = (A(F_0), A(F_1), \ldots, A(F_n))$$

définit une action qui est clairement transitive (par le théorème de la base incomplète, il existe une base $(f_1, \ldots, f_n)$ de $\mathbf{K}^n$ telle que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $F_k = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_k)$ et d est alors dans l'orbite du drapeau canonique).

(2) Puisqu'il n'y a qu'une seule classe, la relation orbite/stabilisateur donne une bijection entre $\mathcal{D}$ et les classes à gauche :

$$\mathcal{D} \simeq GL_n(\mathbf{K}) / \mathrm{Stab}_{GL_n(\mathbf{K})}(\delta)$$

où δ est le drapeau canonique formé des sous-espaces $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ avec $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{K}^n$. Ah oui mais il est facile de voir que $\mathrm{Stab}_{GL_n(\mathbf{K})}(\delta) = T_s$ et on peut donc identifier (c'est une bijection)

$$\mathcal{D} \simeq GL_n(\mathbf{K})/T_s.$$

(3) On considère l'action de $GL_n(\mathbf{K})$ sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$:

$$A \cdot (d, d') = (A \cdot d, A \cdot d').$$

Compte-tenu de (2), en identifiant $d = X \cdot \delta$ avec $\overline{X} \in GL_n(\mathbf{K})/T_s$ et $d' = Y \cdot \delta$ avec $\overline{Y} \in GL_n(\mathbf{K})/T_s$, on obtient une action de $GL_n(\mathbf{K})$ sur $GL_n(\mathbf{K})/T_s \times GL_n(\mathbf{K})/T_s$ définie par :

$$A \cdot (\overline{X}, \overline{Y}) = (\overline{AX}, \overline{AY}).$$

1. La j-ème ligne de $P_\sigma T$ est la $\sigma(j)$-ème ligne de T et ATTENTION, la k-ème colonne de TP_σ est la $\sigma^{-1}(k)$-ème colonne de T.

(4) Comptons maintenant les orbites de cette dernière action. Soit $(\overline{X}, \overline{Y}) \in (GL_n(\mathbf{K})/T_s)^2$. On utilise la décomposition de Bruhat de $X^{-1}Y$ pour écrire :

$$(\overline{X}, \overline{Y}) = X \cdot (\overline{I_n}, \overline{T_1 P_\sigma T_2}) = XT_1 \cdot (\overline{T_1^{-1}}, \overline{P_\sigma T_2}) = XT_1 \cdot (\overline{I_n}, \overline{P_\sigma}).$$

Ainsi : $(\overline{X}, \overline{Y}) \in \mathrm{Orb}_{GL_n(\mathbf{K})}(\overline{I_n}, \overline{P_\sigma})$. Un système de représentants des orbites est donc donné par les $(\overline{I_n}, \overline{P_\sigma})$ et toutes les orbites sont distinctes par unicité de σ dans la décomposition de Bruhat. Il y a donc $n!$ orbites.

$\square$

Références.

S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Oraux X-ENS, Algèbre 1*
R. Mneimné, F. Testard *Introduction aux groupes de Lie classiques*
H2G2, tome 2.

101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
150 Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.
157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.
162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.