204. Connexité. Exemples et applications.

Antoine Diez

Leçon réalisée en collaboration avec Gabriel Lepetit

En analyse, mais pas seulement, un problème se pose souvent sous la forme très générale suivante : « *Étant donné un espace topologique E et une propriété $\mathscr{P}$, comment montrer que **tous** les points de E vérifient la propriété $\mathscr{P}$?* ». À notre disposition, on trouve beaucoup de théorèmes d'existence locale (citons par exemple les théorèmes de Cauchy-Lipschitz et d'inversion locale) et on peut se demander s'il existe un moyen *simple* de les globaliser à l'espace entier. C'est parfois possible avec des outils purement topologiques : lorsque l'espace ambiant E est *connexe*, c'est à dire *d'un seul tenant*, on verra qu'une façon simple de procéder est de montrer que le sous-ensemble des éléments vérifiant la propriété $\mathscr{P}$ (le résultat d'existence locale assure qu'il est non vide) est à la fois ouvert et fermé. Ce simple fait assurera alors que tout l'espace vérifie la propriété $\mathscr{P}$. Des raffinements de ce principe ainsi que les définitions élémentaires feront l'objet de la section 1. Des exemples concrets en analyse réelle et complexe seront donnés dans la section 2.

Outre l'utilisation pratique que l'on peut en faire en analyse, la connexité est une notion intrinsèquement topologique qui permet de classifier les objets : typiquement des surfaces (on abordera brièvement le cas des quadriques réelles), mais aussi des groupes topologiques parmi lesquels les groupes matriciels qui feront l'objet de la section 3. Intuitivement, cela revient à se demander si les objets que l'on considère sont *d'un seul tenant*, ou bien constitués de *plusieurs morceaux* et dans ce cas, de combien.

L'essentiel des résultats théoriques et certaines applications sont tirés de [Que07] et [Dol13]. Pour les résultats plus spécialisés, d'autres ouvrages sont cités, notamment [Rud09] pour l'analyse complexe ou [MT86] et [CG13] pour la section 3.

Table des matières

La notation $A \sqcup B$ désignera toujours la réunion disjointe de A et B.

1 Espaces topologiques connexes

1.1 Connexité, définitions et premiers exemples

Définition 1.1 (Espace topologique connexe)**.** Soit X un espace topologique. On a équivalence entre :

(i) Si $X = O_1 \sqcup O_2$ où O_1, O_2 ouverts dans X, alors $O_1 = \emptyset$ ou $O_2 = \emptyset$.

(ii) Si $X = F_1 \sqcup F_2$ où F_1, F_2 fermés dans X, alors $F_1 = \emptyset$ ou $F_2 = \emptyset$.

(iii) Les seules parties à la fois ouvertes et fermées de X sont $\emptyset$ et X.

Dans ce cas, on dit que X est un espace topologique *connexe.*

Exemple 1.2. La droite réelle est connexe. En effet, si $\mathbf{R}$ se partitionnait en deux fermés (disjoints) $A \sqcup B$, alors soient $a \in A$ et $b \in B$ et

$$c := \sup\{r,\ r \in [a, b] \cap A\}.$$

c est bien défini puisque l'ensemble de droite est non vide (a est dedans) et borné (par b). Or, puisque A est fermé, $c \in A$. D'autre part, $(c, b] \subset B$ et comme B est fermé on a aussi $c \in B$. D'où $c \in A \cap B$, ce qui est contradictoire.

Le proposition suivante donne une caractérisation fonctionnelle utile de la notion de connexité.

Proposition 1.3. *L'espace topologique X est connexe si et seulement si toute application continue $\varphi : X \to \mathbf{Z}$ est constante.*

Preuve. ($\Rightarrow$) Soit $x \in X$ et $n = \varphi(x)$. Puisque $\{n\} \subset \mathbf{Z}$ est ouvert et fermé dans $\mathbf{Z}$ et comme φ est continue, $\emptyset \neq \varphi^{-1}(\{n\}) \subset X$ est aussi ouvert et fermé. Or X est connexe donc $\varphi^{-1}(\{n\}) = X$ et φ est constante (égale à n).

($\Leftarrow$) Supposons que X se partitionne en deux ouverts $X = O_1 \sqcup O_2$. Alors $\varphi = \mathbf{1}_{O_1}$ est une application $X \to \mathbf{Z}$ qui est continue (car les O_i sont ouverts), elle est donc constante. Ainsi, ou bien $\varphi = 1$ et $O_2 = \emptyset$, ou bien $\varphi = 0$ et $O_1 = \emptyset$. □

Remarque 1.4. Dans l'énoncé précédent, on peut remplacer $\mathbf{Z}$ par n'importe quel espace discret ayant au moins deux éléments. Typiquement, on choisira souvent $\{0, 1\}$.

Le proposition qui suit est une généralisation du résultat précédent et permet d'appréhender une première technique de passage du local au global par connexité.

Proposition 1.5. *Soient X et Y deux espaces topologiques. Si X est connexe et $\varphi : X \to Y$ est continue localement constante, alors φ est constante.*

Preuve. Soient $x \in X$ et $y = \varphi(x)$. Alors $\varphi^{-1}(\{y\} \subset X$ est non vide et fermé dans X car $\{y\} \subset Y$ l'est dans Y et φ continue. Mais $\varphi{-}1(\{y\})$ est aussi ouvert puisque φ est localement constante. Par suite, $\varphi^{-1}(\{y\}) = X$ et φ est constante. □

Définition 1.6 (Partie connexe)**.** Une partie A d'un espace topologique X est dite *connexe* lorsqu'elle l'est en tant que sous-espace topologique muni de la topologie induite.

Exemple 1.7. L'intervalle $[0,1] \subset \mathbf{R}$ est une partie connexe de $\mathbf{R}$. On peut le voir en utilisant la propriété de la borne supérieure sur $\mathbf{R}$ dans une preuve similaire à celle de la connexité de $\mathbf{R}$.

Contre-exemple 1.8. $\mathbf{Q}$ n'est pas une partie connexe de $\mathbf{R}$. En effet, si $r \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, alors $F_0 := \{q \in \mathbf{Q},\ q \leq r\}$ et $F_1 := \{q \in \mathbf{Q},\ q \geq r\}$ sont deux fermés (pour la topologie induite), non vides, et qui partitionnent $\mathbf{Q}$.

Une notion souvent utile (quoiqu'un peu moins classique) pour caractériser les parties connexes est la notion de *parties séparées* (voir [Dol13] pour plus de détails) :

Définition 1.9 (Parties séparées)**.** Deux parties M et N d'un espace topologique X sont dites *séparées* lorsque

$$(\overline{M} \cap N) \cup (M \cap \overline{N}) = \emptyset.$$

Proposition 1.10. *Soit A une partie d'un espace topologique X. Il y a équivalence entre :*

(i) A est connexe

(ii) Si A se partionne en deux parties séparées (dans X) : $A = M \sqcup N$, alors $M = \emptyset$ ou $N = \emptyset$.

À ce stade, on peut déjà citer quelques résultats de nature topologique utilisant la notion de connexité d'une partie et qui trouveront leur intérêt dans les preuves de certains résultats des sections suivantes.

Exemple 1.11. Les parties connexes de $\mathbf{R}$ sont convexes, ce sont donc des intervalles. La réciproque est aussi vraie.

Théorème 1.12 (Passage des douanes)**.** *Soit A une partie d'un espace topologique X. Toute partie connexe C de X rencontrant l'intérieur et l'extérieur $X \setminus \overline{A}$ de A rencontre ∂A.*

Preuve. [Que07] Si $C \cap \partial A = \emptyset$, alors $C = (C \cap \operatorname{int} A) \sqcup (C \cap \operatorname{ext} A)$. Ainsi, C se partitionne en deux ouverts disjoints donc C ne peut pas être connexe. $\square$

La proposition suivante, qui peut paraitre anecdotique, sera l'argument principal de la preuve du théorème de relèvement 2.10.

Proposition 1.13. *Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur un espace topologique connexe X. Si toutes les classes d'équivalences de $\sim$ sont ouvertes alors il n'y a qu'une seule classe (qui est X tout entier).*

Preuve. Supposons que les classes sont ouvertes. Comme les classes d'équivalence partitionnent l'espace, le complémentaire d'une classe est une réunion de classes d'équivalence donc est ouverte. Par connexité de l'espace, le résultat suit. $\square$

1.2 Stabilité

On étudie dans cette section la stabilité de la notion de connexité par des opérations topologiques (passage à l'adhérence, réunion,...). Énonçons d'abord un des résultat fondamentaux que l'on utilisera beaucoup par la suite :

Théorème 1.14. *Soient X et Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application continue. Si X est connexe alors $f(X)$ est une partie connexe de Y.*

Preuve. On utilise la proposition 1.3 : si $\varphi : f(X) \to \{0,1\}$ est une application continue, alors on veut montrer que φ est constante. Mais puisque X est connexe et que $\varphi \circ f : X \to \{0,1\}$ est continue, on a directement le résultat. □

Une application importante de ce résultat est le théorème des valeurs intermédiaires en analyse réelle. On conclut ce paragraphe en citant trois propriétés de stabilité « topologique ».

Proposition 1.15. *Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes d'un espace topologique X telle qu'il existe $i_0 \in I$ pour lequel $A_i \cap A_{i_0} \neq \emptyset$ pour tout $i \in I$. Alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe.*

Proposition 1.16. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une famille d'espaces topologiques. Le produit $\prod_{n\in\mathbf{N}} X_n$ est connexe pour la topologie produit si et seulement si X_n est connexe pour tout $n \in \mathbf{N}$.*

Proposition 1.17. *L'adhérence d'une partie connexe est une partie connexe.*

Notons que l'intersection de deux parties connexes n'est pas forcément connexe. Par exemple, l'intersection d'un cercle et d'une droite dans $\mathbf{R}^2$ est parfois égale à la réunion de deux points disjoints : l'intersection n'est pas connexe elle est est constituée de deux *composantes connexes.*

1.3 Composantes connexes

Lorsque l'espace topologique X considéré (ou une de ses parties) n'est pas a priori connexe, il est toujours possible de se ramener à des espaces connexes en considérant les *composantes connexes* de X.

Définition 1.18 (Composante connexe)**.** La composante connexe d'un point $x \in X$ est le plus grand connexe contenant x :

$$C(x) := \bigcup_{\substack{x\in C \\ C \text{ connexe}}} C$$

(Notons que $C(x)$ est bien connexe en vertu de la proposition 1.15).

La proposition suivante montre l'intérêt d'étudier l'espace "composante par composante".

Proposition 1.19. *Les composantes des éléments d'un espace topologique sont fermées et disjointes deux à deux. En particulier, elles partitionnent l'espace.*

On peut naturellement se demander s'il existe une manière la plus générale possible pour déterminer les composantes connexes d'un espace topologique. Une réponse est donnée par les deux propositions suivantes (voir [Dol13] p.119).

Proposition 1.20. *Si* $X = \bigsqcup_{j\in J} O_j$ *où* $(O_j)_{j\in J}$ *est une famille d'ouverts connexes disjoints deux à deux, alors les* O_j *sont les composantes connexes de* X*.*

Proposition 1.21. *Si* $X = \bigsqcup_{j\in J} F_j$ *où* $(F_j)_{j\in J}$ *est une famille* ***finie*** *de fermés connexes disjoints deux à deux, alors les* F_j *sont les composantes connexes de* X*.*

Exercice 1.22. Le graphe de l'hyperbole d'équation $xy = 1$ dans $\mathbf{R}^2$ a deux composantes connexes. Pour le voir, il suffit de l'écrire comme réunion disjointe de deux fermés (les deux branches de l'hyperbole) chacun pouvant être paramétré continûment par un réel variant dans un intervalle ouvert (donc connexe). En anticipant un tout petit peu sur le paragraphe suivant, cela montre que ces fermés sont connexes par arcs donc connexes et le résultat suit par la proposition précédente. En fait, la théorie des formes quadratiques abordée brièvement dans la dernière section permet de répondre plus généralement à la question : *combien l'ensemble* $q^{-1}(\{1\})$ *a-t-il de composantes connexes lorsque* q *est une forme quadratique sur* $\mathbf{R}^d$ *?*

Contre-exemple 1.23. L'hypothèse de finitude dans la proposition précédente est essentielle comme le montre le contre-exemple suivant : $\mathbf{R} = \bigsqcup_{x\in\mathbf{R}} \{x\}$. Par ailleurs, on a le :

Théorème 1.24 (Sierpinski)**.** *Un espace métrique compact connexe ne peut pas être partitionné en une famille infinie dénombrable de fermés disjoints deux à deux.[Dol13]*

Dans le cadre de ce texte, le théorème précédent fait figure de curiosité topologique. Ça n'est pas le cas des deux résultats suivants. Le théorème qui suit est important lorsqu'il s'agit de classifier des espaces en termes de connexité. En particulier on justifie qu'il n'y a pas lieu dans ce cas de distinguer deux espaces homéomorphes.

Proposition 1.25. *Un homéomorphisme* $h : X \to Y$ *entre deux espaces topologiques échange les composantes connexes de* X *et de* Y*.*

Le théorème suivant, d'apparence simple et intuitif, est en fait assez profond et difficile à montrer. On consultera [Que07] chapitre 6 ou [GT96] pour une preuve dans le cas général. Le cas d'une courbe C^1 est un peu plus simple (voir [GT98]).

Théorème 1.26 (Jordan)**.** *Soit* γ *une courbe* C^0 *fermée simple d'image* $J \subset \mathbf{R}^2$*. Alors* J^c *a deux composantes connexes : une composante bornée notée* C_0 *et une composante non bornée notée* C_∞ *vérifiant* $\partial C_0 = \partial C_\infty = J$*.*

Exercice 1.27. À part les résultats concernant la bornitude des composantes connexes, le théorème de Jordan reste vrai lorsqu'on se place sur la sphère $\mathbf{S}^2$: il suffit d'envoyer la sphère sur la plan par projection stéréographique relativement à un pôle n'appartenant pas au tracé de la courbe. Par contre, le résultat est faux sur un ruban de Möbius.

1.4 Connexité par arcs

La connexité par arcs est une notion plus faible de connexité mais généralement plus maniable (car plus analytique). Dans les faits, les deux notions coïncident souvent, comme le montrera la proposition 1.35

Définition 1.28 (Connexité par arcs)**.** Un espace topologique X est dit *connexe par arcs* lorsque pour tout $(a,b) \in X^2$, il existe une application $\gamma : [0,1] \to X$ continue telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

EXEMPLE 1.29. La sphère $\mathbf{S}^n$ est connexe par arcs.

REMARQUE 1.30. À l'instar de ce qui a été fait dans les sections précédentes, il est possible de définir les notions de *parties connexes par arcs* et de *composante connexe par arcs.*

Proposition 1.31. *Les implications suivantes rendent compte des différents niveaux de classification des espaces topologiques :*

$$\textit{convexe} \quad\Rightarrow\quad \textit{étoilé} \quad\Rightarrow\quad \textit{connexe par arcs} \quad\Rightarrow\quad \textit{connexe.}$$

CONTRE-EXEMPLE 1.32. L'adhérence de $\big\{(x, \sin(1/x)),\ x > 0\big\}$ dans $\mathbf{R}^2$ est connexe mais pas connexe par arcs

EXEMPLE 1.33. Les parties connexes par arcs de $\mathbf{R}$ sont les intervalles

Pour $d \geq 2$, enlever un nombre fini de points à $\mathbf{R}^d$ ne change pas son caractère connexe par arcs (ça n'est pas le cas en dimension 1). En fait, on peut en enlever beaucoup plus, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 1.34. *Si $D \subset \mathbf{R}^2$ est un ensemble dénombrable, alors $\mathbf{R}^2 \backslash D$ est connexe par arcs.*

PREUVE. Soient $x, y \in \mathbf{R}^2 \setminus D$ et Δ la médiatrice du segment $[x,y]$. On montre qu'il existe $m \in \Delta$ tel que le chemin $\gamma_m([0,1]) := [x,m] \cup [m,y]$ soit tracé dans $\mathbf{R}^2 \setminus D$. Pour le voir, il suffit de remarquer que l'ensemble

$$\{m \in \Delta,\ \gamma_m([0,1]) \cap D \neq \emptyset\}$$

est au plus dénombrable (donc distinct de Δ tout entier) car D est dénombrable et $\gamma_m(]0,1[) \cap \gamma_{m'}(]0,1[) = \emptyset$ si $m \neq m'$. □

Pour conclure ce paragraphe, on montre que *souvent*, il y a équivalence entre connexité et connexité par arcs. Notons que la preuve (qui utilise la proposition 1.13) montre un peu mieux que la connexité par arcs : la *connexité par lignes polygônales.*

Proposition 1.35. *Un ouvert connexe d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs.*

PREUVE. On considère la relation d'équivalence sur l'ouvert : $x \sim y$ si et seulement s'il existe une ligne polygônale joignant x et y. Les classes d'équivalences sont ouvertes car autour de tout point de l'ouvert, on peut inclure une boule ouverte dans l'espace de départ ouverte et chacun de ses points est relié au centre par un segment. On applique la proposition 1.13 □

2 Prolongement par connexité

Cette section plus analytique est dédiée à quelques exemples où la notion de connexité intervient dans le passage du local au global.

2.1 Trois théorèmes d'analyse réelle

Voici trois applications de la notion de connexité en analyse réelle. Les preuves partielles insistent sur l'argument de connexité.

Théorème 2.1 (Darboux)**.** *Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et si I est un intervalle ouvert non vide de $\mathbf{R}$, alors $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbf{R}$.*

Preuve. [FGN07] On se place sur le connexe $T = \{(x, y) \in I^2,\ y < x\}$ et on regarde les taux d'accroissement :

$$\tau(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

L'application $\tau : T \to \mathbf{R}$ est continue et son image est connexe : c'est un intervalle. On obtient le résultat en écrivant :

$$\tau(T) \subset f'(I) \subset \overline{\tau(T)}.$$

La première inclusion provient du théorème des accroissements finis, la seconde de la définition de la dérivée comme limite d'un taux d'accroissement. □

Théorème 2.2 (Cauchy-Lipschitz, unicité globale)**.** *Soit $f : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^n$, $(t, y) \mapsto f(t, y)$ continue et localement lipschitzienne en y. Si y_1 et y_2 sont deux solutions sur un intervalle I de l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$ avec les mêmes conditions initiales, alors y_1 et y_2 coincident sur tout l'intervalle I.*

Preuve. On montre l'unicité en considérant l'ensemble :

$$A = \{t \in I,\ y_1(t) = y_2(t)\}.$$

Il est non vide car les deux solutions coïncident initialement. Il est fermé par continuité des solutions et ouvert en invoquant le théorème d'existence locale. Par connexité $A = I$. □

Théorème 2.3 (d'inversion globale de Hadamard-Levy)**.** *Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ de classe C^2, de différentielle inversible en chaque point et telle que $\|f(x)\| \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Alors f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbf{R}^n$.*

Preuve. [ZQ07] On se ramène à montrer l'existence d'une fonction continue $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ surjective telle que $f(g(y)) = y$ pour tout $y \in \mathbf{R}^n$. g est donnée comme la solution d'un système différentiel. La seule chose qui reste à montrer est la surjectivité de g : on montre que son image est à la fois ouverte et fermée et on conclut par connexité. □

2.2 Quelques résultats d'analyse complexe

Plusieurs résultats fondamentaux en analyse complexe entretiennent des liens plus ou moins étroits avec le théorème de Jordan 1.26. Les quelques énoncés qui suivent en sont de brefs exemples. Les preuves manquantes de ces énoncés peuvent être trouvées dans [Rud09].

Proposition 2.4. *Soit γ courbe fermée C^1 par morceaux d'image γ^* tracée dans $\mathbf{R}^2 \simeq \mathbf{C}$. Alors la fonction indice de γ :*

$$\mathrm{Ind}_\gamma : a \mapsto \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$$

est constante à valeurs entières sur chaque composante connexe de $(\gamma^*)^c$.

Une conséquence fondamentale de cette dernière proposition est le :

Théorème 2.5 (Formule de Cauchy)**.** *Soit γ un chemin fermé dans un ouvert convexe Ω de $\mathbf{C}$ et soit f holomorphe sur Ω. Si $z \in \Omega$ et si $z \notin \gamma^*$, on a :*

$$f(z) \cdot \mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

La notion de connexité intervient aussi lorsqu'il s'agit de prolonger des fonctions holomorphes.

Théorème 2.6 (Principe des zéros isolés)**.** *Soient Ω un ouvert connexe du plan complexe et f holomorphe sur Ω. Notons $Z(f)$ l'ensemble des zéros de f dans Ω. Alors, ou bien $Z(f) = \Omega$, ou bien $Z(f)$ n'a pas de point d'accumulation dans Ω et est au plus dénombrable.*

En particulier, du principe des zéros isolés découle le :

Corollaire 2.7 (Unicité du prolongement analytique)**.** *Si f, g sont holomorphes sur un ouvert connexe Ω du plan complexe et coïncident sur un ensemble contenant un point d'accumulation, alors $f = g$ sur Ω.*

Exemple 2.8. La fonction $\zeta : s \mapsto \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$ définie sur $\{\mathrm{Re}(s) > 1\}$ admet un unique prolongement holomorphe à $\{\mathrm{Re}(s) > 0\} \setminus \{1\}$.

Exercice 2.9. Une fonction $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ dont la transformée de Fourier est aussi C^∞ à support compact est nulle. En effet, compte-tenu de la régularité, on peut écrire :

$$\forall \xi \in \mathbf{R}, \quad \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} f(x) e^{-2i\pi x\xi} dx.$$

Mais cette expression prolonge $\hat{f}$ en une fonction holomorphe dans tout $\mathbf{C}$, c'est le théorème d'holomorphie sous l'intégrale : l'intégrande est ici clairement mesurable par rapport à x pour tout ξ et holomorphe en ξ pour (presque tout) x. La domination sur tout compact K de $\mathbf{C}$ ne pose pas de problème puisque f est à support compact :

$$|f(x)e^{-2i\pi x\xi}| = |f(x)e^{2\pi x\Im\xi}| \leq |f(x)|e^{2\pi ab}\mathbf{1}_{B(0,b)}(x) \in L^1(\mathbf{R})$$

où $K \subset B(0,a)$ et $\operatorname{Supp} f \subset B(0,b)$, $a, b > 0$. Par le principe des zéros isolés, si $\hat{f}$ est à support compact, $\hat{f}$ s'annule sur un intervalle de $\mathbf{R}$ non réduit à un point donc $\hat{f} = 0$ sur tout $\mathbf{C}$. On conclut par le théorème d'inversion de Fourier :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\xi)e^{2i\pi x\xi}d\xi = 0.$$

2.3 Le théorème de relèvement continu suivi de quelques applications

Le théorème de relèvement continu, qui fait l'objet de ce paragraphe, permet de pallier dans certains cas à l'absence d'un logarithme continu dans le plan complexe. La connexité intervient ici pour prolonger une fonction définie a priori localement sur un connexe de $\mathbf{R}$. Parmi les applications de ce théorème, on citera quelques problèmes liés à la topologie algébrique et aux déformations continues des lacets dans le plan complexe. Le théorème de Borsuk-Ulam 2.15 en sera une courte illustration.

Théorème 2.10 (Relèvement continu)**.** *Soient $[a, b]$ un intervalle de $\mathbf{R}$ et $\theta_0 \in \mathbf{R}$. On considère $\gamma : [a, b] \to \mathbf{U}$ une application continue telle que*

$$\gamma(a) = e^{i\theta_0}.$$

Alors il existe une unique application continue $\theta : [a, b] \to \mathbf{R}$ envoyant a sur θ_0 telle que

$$\forall t \in [a, b], \ \ \gamma(t) = e^{i\theta(t)}. \tag{1}$$

Une application continue $[a, b] \to \mathbf{U}$ vérifiant (1) s'appelle un relèvement continu de γ. Le lemme suivant sera important :

Lemme 2.11. *Soient $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{R}(\gamma)$. Alors la fonction $\theta_1 - \theta_2$ est une constante appartenant à $2\pi\mathbf{Z}$.*

Preuve. On a pour tout $t \in I$, $\theta_1(t) - \theta_2(t) \in 2\pi\mathbf{Z}$ par définition d'un relèvement. Puisque θ_1 et θ_2 sont des relèvements continus et que l'image d'un connexe par arcs par une fonction continue est connexe par arcs, la conclusion est immédiate. $\square$

En particulier, si on relève γ sur deux sous-intervalles de $[a, b]$ d'intersection non vide, il est possible de prolonger de façon unique chacun de ces relèvements à la réunion des deux sous-intervalles.

Preuve (du théorème de relèvement continu). L'unicité d'un tel relèvement découle du lemme 2.11 [1]. Bien qu'il n'existe pas de fonction argument qui soit continue

1. Puisque $\mathbf{R}$ est un revêtement de $\mathbf{U}$ via $\theta \mapsto e^{i\theta}$, c'est aussi un cas particulier du théorème d'unicité des relèvements en topologie algébrique, qui se prouve aussi par un argument de connexité !

sur tout $\mathbf{C}^*$, il est facile d'en construire une sur n'importe quel plan fendu $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_- e^{i\alpha}$. Cette remarque permet de construire pour tout $t \in I$ un relèvement local de γ restreint à un voisinage de t. La preuve consiste ensuite à globaliser la construction par connexité.

Étape 1. Soit $t \in I$. Par continuité de γ, il existe un intervalle ouvert $I_t \subset [a, b]$ contenant t et tel que $\gamma(I_t) \subset \mathbf{U} \setminus \{-\gamma(t)\}$. Sur le plan fendu $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-\gamma(t)$, on définit une fonction argument continue $\Theta_{\gamma(t)} : \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-\gamma(t) \to \mathbf{R}$. $\Theta_{\gamma(t)} \circ \gamma$ est un relèvement continu de $\gamma|_{I_t}$.

Étape 2. On définit sur $[a, b]$ la relation $t \sim t'$ si et seulement s'il existe un sous intervalle de I contenant t et t' sur lequel γ se relève continûment [2]. Cette relation est clairement symétrique, elle est réflexive grâce à l'étape 1 et comme on peut prolonger les relèvements elle est aussi transitive. C'est donc une relation d'équivalence. De plus, toujours grâce à l'étape 1, il est facile de voir que les classes de $\sim$ sont ouvertes. Par connexité de $[a, b]$, il n'y a qu'une seule classe qui est $[a, b]$ tout entier. En particulier $a \sim b$ et le théorème est prouvé. □

Remarque 2.12. Dans le cas d'une courbe C^1, la preuve est beaucoup plus simple : en différentiant la relation $\gamma(t) = e^{i\theta(t)}$, on voit qu'il suffit de poser :

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \gamma'(s)/\gamma(s)ds.$$

Grâce au théorème de relèvement continu, on va définir la notion de *degré* d'un lacet C^0 qui généralisera la notion d'indice vue dans le cas C^1 (proposition 2.4).

Définition 2.13 (Degré d'un lacet, d'une application)**.** Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}^*$ un lacet. On appelle *degré* de γ l'entier

$$\frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}$$

où θ est un relèvement quelconque de $\gamma/|\gamma|$. On définit le degré d'une application continue $f : \mathbf{U} \to \mathbf{C}^*$ comme le degré du lacet :

$$\tilde{f} : t \in [-\pi, \pi] \mapsto f(e^{it}).$$

Lemme 2.14 (Le degré est localement constant)**.** *Soient γ_1 et γ_2 deux lacets tracés sur $\mathbf{C}^*$. Si $\|\gamma_1 - \gamma_2\|_\infty < \|\gamma_1\|_\infty$ alors γ_1 et γ_2 ont même degré.*

Preuve. La condition implique que $\|\frac{\gamma_2}{\gamma_1} - 1\|_\infty < 1$. Donc le lacet γ_2/γ_1 est tracé dans le plan fendu $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$ et est donc de degré nul. Et il est facile de voir que

$$\deg(\gamma_2/\gamma_1) = \deg(\gamma_2) - \deg(\gamma_1).$$

□

2. *i.e.* la restriction de γ à ce sous-intervalle admet un relèvement continu

Le théorème suivant possède une interprétation amusante : à chaque instant, il existe sur Terre deux points antipodaux en lesquels la pression et la température sont les mêmes.

Théorème 2.15 (Antipodensatz de Borsuk)**.** *Soit $g : \mathbf{S}^2 \to \mathbf{R}^2$ une application continue. Alors il existe un point $\omega \in \mathbf{S}^2$ tel que $g(\omega) = g(-\omega)$.*

Preuve. On définit les applications continues $p : \overline{\mathbf{D}} \to \mathbf{S}^2$ par :

$$\forall z \in \overline{\mathbf{D}}, \;\; p(z) = (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z), \sqrt{1 - \mathrm{Re}(z)^2 - \mathrm{Im}(z)^2})$$

et $f : \overline{\mathbf{D}} \to \mathbf{R}^2$ par :

$$\forall z \in \overline{\mathbf{D}}, \;\; f(z) = g(p(z)) - g(-p(z)).$$

La restriction de p à $\mathbf{U}$ est impaire, tout comme celle de f. Avec les notations précédentes, cela signifie que pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, $\tilde{f}(t + \pi) = -\tilde{f}(t)$. Cela entraîne facilement que le degré de f est impair.
Si f ne s'annulait pas sur $\overline{\mathbf{D}}$, alors considérons l'homotopie

$$H(s,t) := f(se^{it})/|f(se^{it})|$$

qui est une fonction continue en s et en t. Ainsi, $s \mapsto \deg(H(s, \cdot))$ est continue. Comme elle est à valeurs dans $\mathbf{Z}$ elle est constante. Or, $H(0, \cdot)$ est de degré nul et il en est de même pour $H(1, \cdot) = \tilde{f}$. Mais 0 n'est pas impair, d'où contradiction. □

Les mêmes arguments conduisent au théorème de Brouwer pour le disque fermé $\overline{\mathbf{D}}$: il suffit de voir qu'il n'existe pas de retraction de $\overline{\mathbf{D}}$ sur $\mathbf{U}$ (ou de façon équivalente que l'identité sur $\mathbf{U}$, qui est impaire, ne peut pas se prolonger en une fonction continue qui envoie $\overline{\mathbf{D}}$ sur $\mathbf{U}$). Pour conclure, on suppose par l'absurde qu'il existe $\varphi : \overline{\mathbf{D}} \to \overline{\mathbf{D}}$ sans point fixe et à tout point $z \in \overline{D}$ on associe $r(z)$ le point d'intersection de $\mathbf{U}$ et de la demi-droite d'origine $\varphi(z)$ et passant par z. L'application r ainsi définie est une rétraction : c'est impossible (voir [GT96]).

3 Un autre point de vue : connexité dans les espaces de matrices

La connexité est une notion purement topologique. En particulier, ses champs d'application dépassent le seul cadre de l'analyse : on donne dans cette dernière partie quelques exemples concernant les groupes topologiques matriciels.

3.1 Groupes de matrices

Définition 3.1 (Groupe topologique)**.** Un groupe topologique est un groupe G munie d'une topologie séparées pour laquelle le passage à l'inverse $g \mapsto g^{-1}$ et le produit $(g, h) \mapsto g \cdot h$ sont des applications continues.

Exemple 3.2. Pour n'importe quelle norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ les groupes $GL_n(\mathbf{C})$, $SL_n(\mathbf{C})$, $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$, $SO_n(\mathbf{R})$... sont des groupes topologiques.

Proposition 3.3. *Si G est un groupe topologique et H un sous-groupe tel que G/H est connexe, alors G est connexe.*

Théorème 3.4. *On dispose des résultats suivants pour les groupes matriciels usuels :*
- *$GL_n(\mathbf{C})$ est ouvert connexe par arcs*
- *$GL_n(\mathbf{R})$ a deux composantes connexes par arcs :*

$$GL_n^+(\mathbf{R}) = \{M \in GL_n(\mathbf{R}),\ \det(M) > 0\} \quad \textit{et} \quad GL_n^-(\mathbf{R}) = \{M \in GL_n(\mathbf{R}),\ \det(M) < 0\}$$

- *$SL_n(\mathbf{R})$ et $SL_n(\mathbf{C})$ sont connexe par arcs*
- *$SO_n(\mathbf{R})$ est connexe par arcs, c'est l'une des composantes connexes de $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ (la seconde étant $\mathcal{O}_n^-(\mathbf{R}) = \{M \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R}),\ \det(M) = -1\}$).*

Exemple 3.5. On montre que l'ensemble des projecteurs $\mathcal{P}_n(\mathbf{C})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ a $n+1$ composantes connexes qui sont les projecteurs de rang r pour $r \in \{0, \dots, n\}$.

Le théorème suivant est un résultat de théorie des groupes dont la preuve repose essentiellement sur un argument de connexité.

Théorème 3.6. *$SO_3(\mathbf{R})$ est simple.*

Preuve. La preuve est tirée de [FGN08].

Étape 1 : Dans le cas d'un sous-groupe connexe.

Soit G un sous-groupe connexe par arcs de $SO_3(\mathbf{R})$ non réduit à $\{Id\}$. Si $G \lhd SO_3(\mathbf{R})$, on montre que $G = SO_3(\mathbf{R})$ en montrant qu'il contient tous les retournements (*i.e.* les rotations d'angle π). Comme les retournements sont conjugués dans $SO_3(\mathbf{R})$, il suffit de montrer que G en contient un pour qu'il les contienne tous. Dans une base adaptée, $g \in SO_3(\mathbf{R})$ peut s'écrire :

$$g = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et l'application

$$g \in SO_3(\mathbf{R}) \mapsto \frac{\mathrm{Tr} g - 1}{2} = \cos\theta$$

est continue. On commence par trouver une rotation dont l'angle θ vérifie $\cos\theta \leq 0$:
- Soit $g \in G$ d'angle $\theta \in]0, \pi/2[$. Si $\cos\theta \leq 0$, on a fini. Sinon on montre qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $N\theta$ soit dans $[\pi/2, \pi]$. En effet :

$$\frac{\pi}{2} \leq N\theta \leq \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2\theta} \leq N \leq \frac{\pi}{\theta}$$

  et $N = \lfloor \pi/\theta \rfloor$ convient. Notons $s = g^N \in G$.

- Comme G est connexe par arcs, il existe un chemin continu γ, tracé dans G, joignant Id à s. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que l'angle de $r := \gamma(t_0) \in G$ soit $\pi/2$. Et $r^2 \in G$ est un retournement.

Étape 2 : On se ramène au cas connexe.

Soit G un sous-groupe de $SO_3(\mathbf{R})$. Soit G_0 la composante connexe par arcs de Id dans G.

- G_0 est un sous-groupe de G car si $g, h \in G_0$ sont respectivement reliés à Id via des chemins continus γ et γ' tracés dans G, alors $t \mapsto \gamma(t)\gamma'(t)^{-1}$ est un chemin continu (car l'inverse est continu dans un groupe topologique), tracé dans G, qui relie gh^{-1} à Id.
- Si $G \lhd SO_3(\mathbf{R})$ alors $G_0 \lhd SO_3(\mathbf{R})$. En effet, si $h \in SO_3(\mathbf{R})$ et $g \in G_0$, en prenant γ en chemin tracé dans G reliant continûment g à Id, on voit que $t \mapsto h\gamma(t)h^{-1} \in G$ est un chemin reliant continûment Id à hgh^{-1} donc ce dernier appartient à G_0.

Étape 3 : Conclusion.

Soient G un sous groupe distingué de $SO_3(\mathbf{R})$ et G_0 la composante connexe par arcs de Id dans G qui est un sous-groupe distingué de $SO_3(\mathbf{R})$ par l'étape 2.

- Si G_0 n'est pas réduit à $\{Id\}$ alors l'étape 1 montre que $G_0 = SO_3(\mathbf{R})$ et donc $G = SO_3(\mathbf{R})$.
- Si $G_0 = \{Id\}$, alors les composantes connexes par arcs de G sont des singletons car si $g, h \in G$ sont dans la même composante reliés par un chemin continu γ, alors $t \mapsto h^{-1}\gamma(t)$ relie continûment $h^{-1}g$ à Id donc $h^{-1}g \in G_0 \Rightarrow h = g$. On conclut en montrant que G est réduit à $\{Id\}$: si $g \in G$, l'application :

$$h \in SO_3(\mathbf{R}) \mapsto hgh^{-1} \in G$$

est continue et à valeurs dans G car G est distingué dans $SO_3(\mathbf{R})$. Comme $SO_3(\mathbf{R})$ est connexe par arcs, l'image de cette application l'est aussi : elle est réduite à $\{g\}$. En particulier g commute à toutes les rotations [3] donc $g = Id$.

$\square$

3.2 Une application en algèbre linéaire : une propriété de l'exponentielle matricielle

Commençons par un théorème qui illustre bien le caractère « globalisant » propre aux espaces connexes. Ici l'existence locale donnée par le théorème d'inversion locale est globalisée automatiquement par connexité à l'étape 3. Notons d'ailleurs que cette dernière étape n'est pas spécifique au problème énoncé ici mais décrit une propriété

3. Le centre de $SO_3(\mathbf{R})$ est trivial car si h est une rotation d'angle Δ et $g \in Z(SO_3(\mathbf{R}))$, on a $ghg^{-1} = h$. Mais ghg^{-1} est une rotation d'angle $g(\Delta)$ donc g fixe toutes les droites donc est une homothétie. En dimension impaire, on a nécessairement $g = Id$. En dimension paire, il y a aussi $-Id$ donc en particulier, les $SO_{2n}(\mathbf{R})$ ne sont pas simples.

générale des groupes de matrices. Le même argument est utilisé dans [GT96] pour montrer la simplicité des $SO_n(\mathbf{R})$.

Théorème 3.7. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$*. Alors,* $\exp(\mathbf{C}[A]) = \mathbf{C}[A] \cap GL_n(\mathbf{C})$*. En particulier,* $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \to GL_n(\mathbf{C})$ *est surjective et un antécédent de* $A \in GL_n(\mathbf{C})$ *est un polynôme (complexe) en* A*.*

Preuve. La preuve est tirée de [Zav13].

Étape 1 : Quelques résultats préliminaires.

- On commence par observer l'égalité $\mathbf{C}[A]^\times = \mathbf{C}[A] \cap GL_n(\mathbf{C})$ où $\mathbf{C}[A]^\times$ est le groupe des inversibles de $\mathbf{C}[A]$. Seule l'inclusion $\supset$ pose question : il s'agit de voir que l'inverse d'une matrice M est un polynôme en M (en effet le coefficient constant de son polynôme minimal est non nul : $\mu_M = \alpha + XP$ et $M^{-1} = -P(M)/\alpha$). Ainsi, l'inverse d'un élément de $\mathbf{C}[A] \cap GL_n(\mathbf{C})$ reste dans $\mathbf{C}[A]$ (c'est un polynôme de polynôme en A)
- Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $\exp(M) \in \mathbf{C}[M]$: en effet, c'est une limite dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ (pour la norme d'algèbre) d'éléments de $\mathbf{C}[M]$ qui est un sous-espace vectoriel de dimension finie donc fermé. En conséquence,
$$\exp : \mathbf{C}[A] \to \mathbf{C}[A]^\times$$
est un morphisme de groupes.
- $\mathbf{C}[A]^\times = \mathbf{C}[A] \cap \det^{-1}(\mathbf{R}^*)$ est un ouvert de $\mathbf{C}[A]$. Il est aussi connexe par arcs (donc connexe) car si $M, N \in \mathbf{C}[A]^\times$, la fonction
$$z \in \mathbf{C} \mapsto \det(zM + (1-z)N)$$
est polynomiale en z et non nulle donc admet un nombre fini de zéros. 0 et 1 ne sont pas des zéros de ce polynôme donc on peut construire une courbe $z(t) \in \mathbf{C}$ reliant 0 et 1 en évitant ces zéros [4]. Ainsi
$$t \in [0,1] \mapsto z(t)M + (1 - z(t))N$$
est une courbe tracée dans $\mathbf{C}[A]^\times$ reliant continûment N et M.

Étape 2 : exp *est localement un difféomorphisme*

Comme la différentielle de $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \to GL_n(\mathbf{C})$ en 0 est l'identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on a aussi en restreignant $\exp : \mathbf{C}[A] \to \mathbf{C}[A]^\times$:
$$d\exp(0) = id_{\mathbf{C}[A]}.$$
En particulier cette différentielle est bijective et le théorème d'inversion locale assure l'existence de deux ouverts $\mathcal{U} \subset \mathbf{C}[A]$ et $\mathcal{V} \subset \mathbf{C}[A]^\times$ contenant respectivement 0 et

4. On montre même que $\mathbf{R}^2 \setminus D$ où D est dénombrable est connexe par arcs

Id tel que $\exp : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ soit un difféomorphisme. Comme exp est un morphisme de groupes, le résultat demeure au voisinage de chaque point $M \in \mathbf{C}[A]$:

$$\exp : M + \mathcal{U} \to \exp(M)\mathcal{V}$$

est un difféomorphisme.

Étape 3 : un argument de connexité pour conclure.

L'étape 2 implique en fait que $\exp(\mathbf{C}[A])$ est un ouvert de $\mathbf{C}[A]^\times$. Mais c'est aussi un fermé en remarquant que

$$\mathbf{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbf{C}[A]) = \bigcup_{M \in \mathbf{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbf{C}[A])} M \exp(\mathbf{C}[A])$$

(l'inclusion $\supset$ se prouve par contraposée). En vertu de la connexité de $\mathbf{C}[A]^\times$, on conclut que

$$\exp(\mathbf{C}[A]) = \mathbf{C}[A]^\times = \mathbf{C}[A] \cap GL_n(\mathbf{C}).$$

□

Citons une application de ce résultat :

Proposition 3.8. *L'image par l'application exponentielle de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est l'ensemble*

$$\exp(\mathcal{M}_n(\mathbf{R})) = \{A^2, \ \ A \in GL_n(\mathbf{R})\}.$$

Preuve.
$\subset$: Il suffit de remarquer que $\exp(M) = \exp(\frac{1}{2}M)^2$
$\supset$: Soit $M = A^2$ où $A \in GL_n(\mathbf{R})$. Il existe un polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que $A = \exp(P(A))$. Comme A est réelle, on a aussi $\exp(\overline{P}(A)) = \overline{A} = A$ et donc

$$\exp((P + \overline{P})(A)) = A^2 = M.$$

□

3.3 Une application en algèbre bilinéaire : les composantes connexes des quadriques réelles

Pour terminer, revenons à l'exemple 1.22, vu comme un cas particulier de la théorie des formes quadratiques. Il s'agit ici d'étudier certains groupes d'isométries. Prenons deux entiers p, q dont la somme vaut n et $\mathcal{O}(p,q) \subset GL_n(\mathbf{R})$ le groupe des isométries de la forme quadratique standard sur $\mathbf{R}^n$ de signature (p,q) :

$$\mathcal{O}(p,q) = \{M \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbf{R}), \ \ {}^tMI_{p,q}M = I_{p,q}\}$$

où $I_{p,q}$ désigne la matrice :

$$I_{p,q} := \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}.$$

Le théorème fondamental est le suivant :

Théorème 3.9. *Il existe un homéomorphisme :*

$$\mathcal{O}(p,q) \cong \mathcal{O}(p) \times \mathcal{O}(q) \times \mathbf{R}^{pq}.$$

La preuve de ce théorème est un peu longue et repose essentiellement sur le théorème de décomposition polaire. Comme elle ne concerne que les formes quadratiques, on l'omet ici. On pourra la trouver dans [Zav13] ou [CG13].

Corollaire 3.10. *Si p et q sont non nuls, alors $\mathcal{O}(p,q)$ a quatre composantes connexes par arcs.*

Preuve. On a vu que $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ a deux composantes connexes. On conclut avec la proposition 1.16. □

On appelle *composante neutre*[5] de $\mathcal{O}(p,q)$ la composante connexe de l'identité et on la note $SO_0(p,q)$. On peut montrer (voir [CG13]) que c'est un sous-groupe de $\mathcal{O}(p,q)$ d'indice 2, il est donc distingué et le quotient est donné par :

$$\frac{\mathcal{O}(p,q)}{SO_0(p,q)} = \{I_{p,q}, g, h, gh\}$$

où on peut choisir pour représentants :

$$g = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad h = \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

On est maintenant en mesure d'apporter une réponse à la généralisation du problème soulevé par l'exemple 1.22, à savoir « *Combien de composantes connexes a la quadratique réelle $q^{-1}(\{1\})$ où q est une forme quadratique réelle de signature (r,s) ?* ». La réponse est donnée par le théorème suivant. On ne donnera que les grandes lignes de la preuve qui repose sur une étude un peu fine des formes quadratiques et dépasse largement le cadre topologique de ce texte.

Théorème 3.11. *Si q est une forme quadratique réelle de signature (r,s) avec $r+s=n$, alors le nombre k de composantes connexes de la quadrique $\mathscr{C} = q^{-1}(\{1\})$ est donné par :*

$$k = \begin{cases} 0 & si\ r = 0 \\ 1 & si\ r \geq 2 \\ 2 & si\ r = 1 \end{cases}$$

Preuve (idées). On va se contenter de lister les grandes étapes de la preuve, laquelle est adaptée de l'exercice VI.B.8 de [CG13] et d'un texte de Lucien Hennecart.

5. Il ne s'agit pas de $\mathcal{O}(p,q) \cap SL_n(\mathbf{R})$

(1) Grâce à la loi d'inertie de Sylvester, on sait déjà que $\mathscr{C}$ a au plus 2 composantes connexes et on peut sans perte de généralité se ramener à étudier la quadrique :

$$\mathscr{C} = q^{-1}(\{1\}) = \{x_1^2 + \ldots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \ldots - x_n^2 = 1\}.$$

(2) On montre que $\mathcal{O}(r,s)$ agir transitivement sur $\mathscr{C}$: pour cela, on remarque que si $x, y \in \mathscr{C}$ alors, puisque $q(x) = q(y) = 1$,

$$\tilde{u} : \left| \begin{array}{rcl} \mathbf{R}x & \longrightarrow & \mathbf{R}y \\ x & \longmapsto & y \end{array} \right.$$

est une isométrie que le théorème de Witt nous autorise à prolonger en une isométrie $u \in \mathcal{O}(r,s)$ telle que $u(x) = y$.

(3) On étudie maintenant l'action de $SO_0(r,s)$ sur les composantes connexes de $\mathscr{C}$. Si A est une telle composante connexe, alors l'action :

$$\begin{array}{rcl} SO_0(r,s) \times A & \longrightarrow & \mathscr{C} \\ (g,a) & \longmapsto & ga \end{array}$$

est continue et par connexité de A et $SO_0(r,s)$, on déduit que pour tout $g \in SO_0(r,s)$, $gA \subset A$. En particulier, on vient de montrer que $SO_0(r,s)$ stabilise toutes les composantes connexes de $\mathscr{C}$. Ce fait est aussi valable pour les autres composantes connexes de $\mathcal{O}(r,s)$.

(4) En notant E l'ensemble des composantes connexes de $\mathscr{C}$, on en déduit que le quotient $\mathcal{O}(r,s)/SO_0(r,s)$ agit sur les composantes connexes de $\mathscr{C}$. D'où un morphisme :

$$\frac{\mathcal{O}(r,s)}{SO_0(r,s)} \longrightarrow \mathfrak{S}(E).$$

(5) On considère maintenant les éléments $e = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathscr{C}$ et $f = (-1, 0, \ldots, 0) \in \mathscr{C}$. À l'aide des représentants explicites (2), on remarque que $\{C(e), C(f)\}$ est stable sous l'action précédente, où on a noté $C(e)$ et $C(f)$ les composantes connexes respectives de e et f.

(6) On peut conclure. Si $r = 1$, alors, e et f sont dans deux composantes connexes distinctes : il suffit de voir que la projection sur la première composante de $\mathscr{C}$ contient des éléments positifs (il y a 1 en considérant e) et des éléments négatifs (il y a -1 en considérant f) mais ne contient pas 0. Par continuité de la projection, e et f sont dans deux composantes connexes distinctes. Maintenant, si $r \geq 2$, alors, l'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'hyperplan $\{(x_1, x_2, 0, \ldots, 0),\ (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2\}$ est un cercle, donc est connexe et e et f sont dans la même composante connexe. Comme $\mathcal{O}(r,s)$ agit transitivement sur $\mathscr{C}$, il n'y a qu'une seule composante connexe.

$\square$

Références

[CG13] Philippe Caldero and Jérôme Germoni. *Histoires hédonistes de groupes et de géométries.* Calvage & Mounet, 2013.

[Dol13] Szymon Dolecki. *Analyse fondamentale : espaces métriques, topologiques et normés.* Hermann, 2013.

[FGN07] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X-ENS : Analyse 1.* Cassini, 2007.

[FGN08] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X-ENS : Algèbre 3.* Cassini, 2008.

[GT96] Stéphane Gonnord and Nicolas Tosel. *Topologie et analyse fonctionnelle.* Ellipses, 1996.

[GT98] Stéphane Gonnord and Nicolas Tosel. *Calcul différentiel : thèmes d'analyse pour l'agrégation.* Ellipses, 1998.

[MT86] Rached Mneimné and Frédéric Testard. *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques.* Hermann, 1986.

[Que07] Hervé Queffélec. *Topologie.* Dunod, 2007.

[Rud09] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe : cours et exercices.* Dunod, 2009.

[Zav13] Maxime Zavidovique. *Un max de maths : problèmes pour agrégatifs et mathématiciens, en herbe ou confirmés.* Calvage & Mounet, 2013.

[ZQ07] Claude Zuily and Hervé Queffélec. *Analyse pour l'agrégation.* Dunod, 2007.