Sur la proportion des couples d'entiers premiers entre eux.

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note r_n la proportion des couples d'entiers de $\{1, \ldots, n\}$ formés d'entiers premiers entre eux.

Proposition. *Si μ désigne la fonction de Möbius, on a :*

$$r_n = \frac{1}{n^2} \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2 .$$

En particulier :

$$\lim_{n \to +\infty} r_n = \frac{6}{\pi^2}.$$

Preuve. On note A_n l'ensemble des couples $(a, b) \in \{1, \ldots, n\}^2$ tels que $a \wedge b = 1$. On a donc :

$$r_n = \frac{\operatorname{Card} A_n}{n^2}.$$

Soient $p_1, \ldots, p_k$ les nombres premiers inférieurs à n et U_i l'ensemble des couples $(a, b) \in \{1, \ldots, n\}^2$ tels que $p+i|a$ et $p_i|b$, On a donc :

$$A_n = \left(\bigcup_{i=1}^{k} U_i \right)^c .$$

On utilise la formule du crible pour calculer le cardinal de A_n :

$$\operatorname{Card} \left(\bigcup_{i=1}^{k} U_i \right) = \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1, \ldots, k\}} (-1)^{1+\operatorname{Card} I} \operatorname{Card} \left(\bigcap_{i \in I} U_i \right).$$

Maintenant, si $I \subset \{1, \ldots, k\}$ est non vide, l'intersection des U_i pour $i \in I$ est exactement l'ensemble des couples de multiples strictement positifs de $\prod_{i \in I} p_i$ inférieurs ou égaux à n. On a donc :

$$\operatorname{Card} \left(\bigcap_{i \in I} U_i \right) = \left\lfloor \frac{n}{\prod_{i \in I} p_i} \right\rfloor^2 .$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \operatorname{Card} A_n &= n^2 - \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1, \ldots, k\}} (-1)^{1+\operatorname{Card} I} \operatorname{Card} \left(\bigcap_{i \in I} U_i \right) \\ &= n^2 - \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1, \ldots, k\}} (-1)^{1+\operatorname{Card} I} \left\lfloor \frac{n}{\prod_{i \in I} p_i} \right\rfloor^2 = \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2 . \end{aligned}$$

On en déduit la formule pour r_n. Pour le calcul de la limite, on aura besoin du :

Lemme. *Pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$,* $\displaystyle\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & si \quad n = 1 \\ 0 & si \quad n \geq 2 \end{cases}$

Preuve. Il n'y a rien à prouver pour $n = 1$ et si $n \geq 2$, on écrit sa décomposition en facteurs premiers :

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$$

de sorte que

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i = (1-1)^k = 0.$$

□

Maintenant, on écrit :

$$\left| r_n - \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2} \right| = \left| \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left(\frac{1}{n^2} \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2 - \frac{1}{d^2} \right) \right|.$$

Puis on utilise la majoration :

$$\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor > \frac{n}{d} - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n^2} - \frac{2}{dn} < \frac{1}{n^2} \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2 - \frac{1}{d^2} \geq 0$$

pour continuer :

$$\left| r_n - \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2} \right| \leq \sum_{d=1}^{n} \left(\frac{2}{dn} - \frac{1}{n^2} \right) \leq \frac{2}{n} \sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d} - \frac{1}{n} = \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n} \right).$$

Puisqu'il y a absolue convergence de la série des $\mu(d)/d$:

$$\lim_{n \to +\infty} r_n = \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2}.$$

Enfin, par sommabilité des séries en question, on applique le théorème sur le produit des séries :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right) &= \sum_{d,n \geq 1} \frac{\mu(d)}{(dn)^2} = \sum_{d \geq 1,\, d|m} \frac{\mu(d)}{m^2} \\ &= \sum_{m \geq 1} \sum_{d|m} \frac{\mu(d)}{m^2} = \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m^2} \sum_{d|m} \mu(d) = 1. \end{aligned}$$

D'où la conclusion. □

Référence. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas *Oraux X-ENS : Algèbre 1*

190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.
230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.